PYTHAGORAS

WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

55ste JAARGANG - NUMMER 2 - NOVEMBER 2015

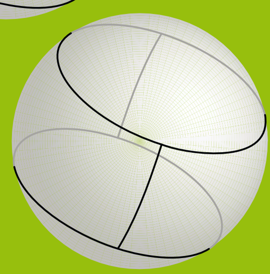
Technische Universiteit Delft * Technische Universiteit Eindhoven * Universiteit Twente

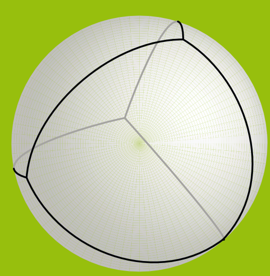
DOE MEE MET DE MATHE KALENDER

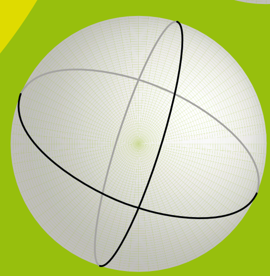
De Mathekalender van de universiteiten van Delft, Eindhoven en Twente (verenigd in 3TU.AMI) en het Duitse instituut MATHEON is een digitale adventskalender. Van 1 tot en met 24 december wordt dagelijks een vakje 'geopend' waarachter een wiskundeopgave verschijnt met tien mogelijke antwoorden. Deze opgaven – in een sprookjesachtige sfeer van de kersttijd – zijn uitdagend, en soms van het niveau van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Omdat het meerkeuzevraagstukken zijn, worden er geen toelichtingen of bewijzen gevraagd.
Het is een individuele wedstrijd, maar het is natuurlijk leuk om met een groep of schoolklas te proberen het goede antwoord te vinden. Elke dag zijn er individuele prijzen en aan het eind wint de beste scholier een laptop.

Opgeven, spelregels en archief van oude opgaven: **www.3tu.nl/ami/en/mathekalender**
Vragen? Mail naar **3tuami-ewi@tudelft.nl**

De verdeling van alle cadeautjes is een karwei dat eerlijk verdeeld wordt onder Sint Nicolaas, Père Noël, Vadertje Vorst en Santa Claus. Om het vervoer tussen de vier werkterreinen zo goed mogelijk vorm te geven, zoeken ze een opdeling van het oppervlak van de aardbol in vier delen met dezelfde oppervlakte, en met zo een zo klein mogelijke totale lengte van de grenslijnen tussen de verschillende gebieden. Santa Claus stelt voor het boloppervlak te halveren door de evenaar, en vervolgens de twee poolstreken door breedtecirkels af te scheiden. Père Noël wil de twee poolstreken wel zo houden, maar het gebied rond de equator niet door de evenaar opdelen. Hij oppert de mogelijkheid deze zone te halveren met twee tegenover elkaar liggende lengtegraden: grote cirkels op de bol die door de twee polen gaan. Sint Nicolaas is voorstander van een opdeling van het boloppervlak in vier congruente, gelijkzijdige boldriehoeken. Vadertje Vorst vindt dit allemaal te ingewikkeld; hij zou het liefst het boloppervlak ook door de evenaar halveren, maar vervolgens de beide halfronden door een grote cirkel door de beide polen in tweeën delen. Een van de vier kerstmannen heeft de juiste oplossing! Wie? Hoe groot is de minimale totale lengte van de grenslijnen die nodig is om het oppervlak van een bol met straal 1 te verdelen in vier stukken met dezelfde oppervlakte? Het antwoord is te vinden op **http://goo.gl/2Wjoue** (pagina 25).

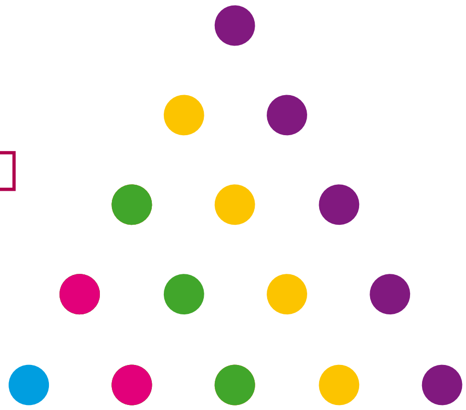






INHOUD

4

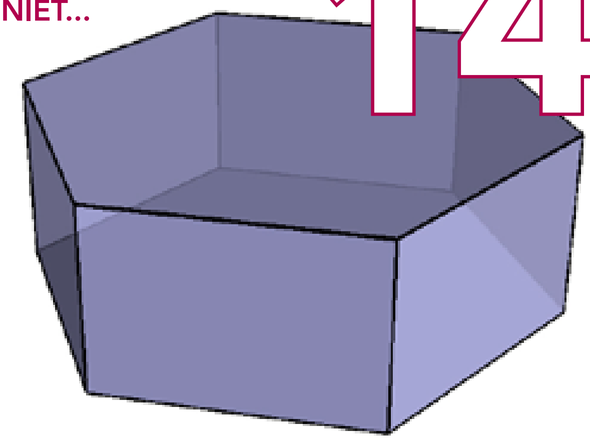


DRIEHOEKSGETALLEN

De driehoeksgetallen vormen een interessante rij die met veel andere ideeën in de wiskunde te maken heeft. Zo zijn er verbanden met de derdemachten, de tetraëdergetallen en de volmaakte getallen.

14

HET IS EEN PRISMA, OF TOCH NIET...



Hoe kun je een kubus, een rombendodecaëder en een afgeknotte octaëder omvormen tot een zeszijdig prisma?

今有物　不知其數　三　三數之
賸二　五　五數之　賸三　七
七數之　賸二 問物幾何

10

Bovenstaande zin beschrijft een wiskundig probleem uit het Chinese boek *Sun Tzu Suan Jing*. Je kunt het probleem oplossen met behulp van de Chinese reststelling.

j

i

1	9	17	25	5	13	21
22	2	10	18	26	6	14
15	23	3	11	19	27	7
8	16	24	4	12	20	28

EN VERDER

Omslagillustratie: In een groep geeft iedereen elke andere persoon precies één keer een hand. Het aantal keren dat er handen geschud worden, is een driehoeksgetal.

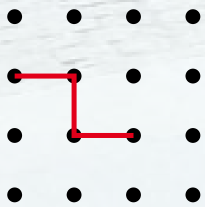
NIVEAUBALKJES Sommige pagina's bevatten één of meer zwarte balkjes onder het paginanummer. Voor artikelen zonder balkje is geen specifieke voorkennis nodig. Artikelen met één balkje bevatten wiskunde uit de onderbouw. Artikelen met twee balkjes vereisen kennis uit de bovenbouw. Drie balkjes: net iets moeilijker.

KLEINE NOOTJES

■ door Jan Guichelaar

SLANG VAN DRIE

In een vierkant rooster van $4 \times 4 = 16$ punten kun je op de roosterpunten een slang van drie eenheden tekenen. Eén zo'n slang zie je hieronder. In totaal zijn er vier verschillende mogelijkheden om deze slang in het rooster neer te leggen. Twee mogelijkheden zijn niet verschillend als je het rooster plus slang door draaiing of spiegeling in de andere kunt laten overgaan.



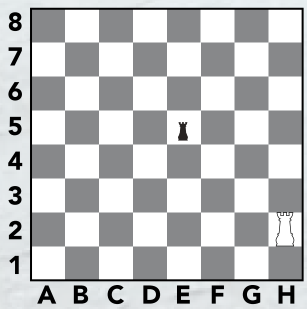
Hoeveel andere vormen slangen van drie eenheden bestaan er? En op hoeveel verschillende manieren kun je die slangen in het rooster neerleggen?

HOEVEEL BLOKKEN?

Je hebt 60 kubusvormige blokjes. Daarmee maak je één grote (massieve) balk. Je moet alle blokjes gebruiken. Hoeveel verschillende balken zijn er mogelijk?

TOREN TEGEN TORENTJE

Op een schaakbord staat een grote witte toren op veld H2. Je mag die horizontaal of verticaal net zo veel velden verzetten als je wilt (net als in het gewone schaken). Een klein zwart torentje staat op veld E5 en dat mag maar één veld verzet worden, naar rechts, links, boven of onder (in het echte schaken bestaat zo'n stuk niet). Jij hebt de grote toren en begint. In hoeveel zetten kun je de kleine toren slaan, als die zich zo goed mogelijk verdedigt?



Kleine nootjes zijn eenvoudige opgaven die weinig of geen wiskundige voorkennis vereisen om opgelost te kunnen worden. De antwoorden vind je in het volgende nummer van *Pythagoras*.

VOETBAL-COMPETITIE

De clubs Aanvallen, Buitenspel en Corner hebben een onderlinge competitie gespeeld: elk tweetal clubs speelde één keer tegen elkaar. Werd een wedstrijd gewonnen, kreeg de winnende club 3 punten. Bij gelijkspel kregen beide clubs elk 1 punt. Aan het eind van de competitie is de stand als volgt: A 4 punten, B 3 punten en C 1 punt. In totaal werden maar twee doelpunten gemaakt.
Wat waren de drie uitslagen van de wedstrijden?

CONCERTZAAL

Een concertzaal is om 8 uur voor drietiende deel bezet. Tussen 8 uur en half 9 zijn er nog 300 mensen bijgekomen, waarmee de zaal half vol is. Hoeveel mensen kunnen er in de zaal?
(Opgave uit een proefexamen van de rekentoets havo/vwo.)

OPLOSSINGEN KLEINE NOOTJES NR. 1

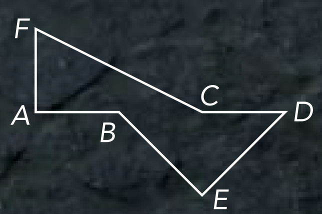
Wie wint? Monica kan winnen. Stel Gijs legt zijn munt op 1. Dan legt Monica haar munt op 3. Als Gijs nu voor 4 kiest, neemt Monica 5, Gijs 6, Monica 2. Als Gijs voor 5 kiest, neemt Monica 6, Gijs 2, Monica 4.

1000 maken. $(1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)\times((1+1+1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1)+1)+1$, $2\times2\times(2\times(2\times2\times2\times2\times2\times2\times2-2)-2)$, $3\times3\times3\times((3+3)\times(3+3)+3/3)+3/3$, $4\times(4\times4\times4\times4-4)-4-4$, $(5+5)\times(5+5)\times(5+5)$, $6\times6\times(6\times6-6)-(6+6)\times6-6-(6+6)/6$, $(7+7+7-7/7)\times(7\times7+7/7)$, $(8+8)\times8\times8-8-8-8$, $(9+9/9)\times(9+9/9)\times(9+9/9)$.

Ballenspel. Als To in de ene vaas één rode en één gele bal doet, en in de andere vaas twee rode en twee gele, dan is de kans dat Ko twee gelijk gekleurde ballen trekt 0,5. Alleen met deze verdeling zal To op den duur niet verliezen. Bij elke andere verdeling is de kans dat Ko twee gelijke trekt kleiner dan 0,5, namelijk $0,\overline{4}$, 0,4, 0,25 of 0.

Wielrenners. Na 1 ronde haalt Anton Bob in op Antons startpunt. Na nog 3 ronden haalt Anton Bob voor de tweede keer in. Op dat tijdstip haalt Anton voor de derde keer Carel in. Na nog anderhalve ronde haalt Anton Carel voor de vierde keer in in het punt tegenover het startpunt van Anton. Anton heeft dan $5\frac{1}{2}$ ronde gereden.

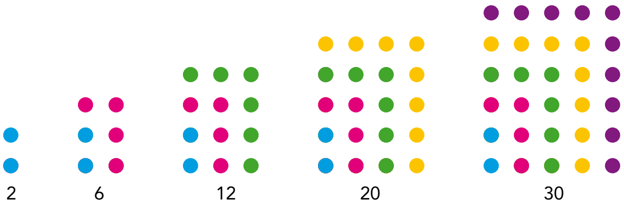
Driehoeken. Bij een regelmatige zeshoek geeft elk drietal hoekpunten een driehoek; in totaal $(6 \times 5 \times 4)/(3 \times 2 \times 1) = 20$ mogelijkheden. Bekijk nu onderstaande onregelmatige zeshoek. De punten *A*, *B*, *C* en *D* liggen op een lijn. Dus de driehoeken *ABC*, *ABD*, *ACD* en *BCD* kunnen niet. Ook liggen de punten *F*, *B* en *E* op een lijn. Dus ook driehoek *FBE* kan niet. In totaal kun je dan nog maar 15 driehoeken tekenen.



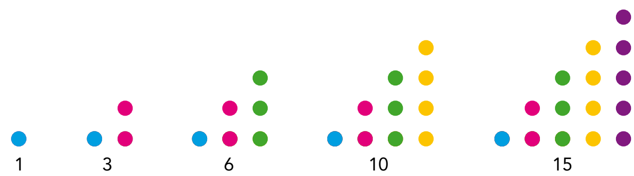
In deze jaargang van *Pythagoras* staan getallenrijen centraal. Deze aflevering gaat over de rij 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Dit zijn de zogeheten driehoeksgetallen. Ze vormen een interessante rij die met veel andere ideeën in de wiskunde te maken heeft. In dit artikel gaan we die verbanden nader onderzoeken.

■ door Jeanine Daems en Matthijs Coster

DRIEHOEKSGETALLEN



Figuur 1 De eerste vijf rechthoeksgetallen



Figuur 2 De eerste vijf driehoeksgetallen

In figuur 1 zie je een serie rechthoeken, opgebouwd uit bolletjes, met daaronder steeds een getal: zogeheten *rechthoeksgetallen*. Figuur 2 toont de *driehoeksgetallen*, die in dit artikel centraal staan.

Valt je iets op aan de plaatjes in figuur 1? Waarschijnlijk heb je al gauw door dat voor elke rechthoek geldt dat de lengte één bolletje meer bevat dan de breedte. Niet alle getallen die je als een rechthoek kunt leggen zijn dus rechthoeksgetallen. Dat zou ook saai zijn, want élk getal kun je leggen als een rechthoek waarvan de lengte dat getal zelf is en de breedte 1. Voor rechthoeksgetallen doen alleen rechthoeken mee waarvan de lengte precies 1 groter is dan de breedte.

Opgave 1 (bron: *De Wageningse Methode*, 1hv, hoofdstuk 3).

a. Stel een formule op voor het n-de rechthoeksgetal.
b. Wat is het verband tussen het n-de rechthoeksgetal en het n-de driehoeksgetal? Geef ook een formule voor het n-de driehoeksgetal.
c. Hoe kun je nu efficiënt uitrekenen wat $1 + 2 + 3 + \cdots + 300$ is?

Als je telkens twee opeenvolgende driehoeksgetallen bij elkaar optelt, krijg je de volgende blauwgedrukte rij:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...
som 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

Opgave 2 (bron: *De Wageningse Methode*, 1hv, hoofdstuk 3).

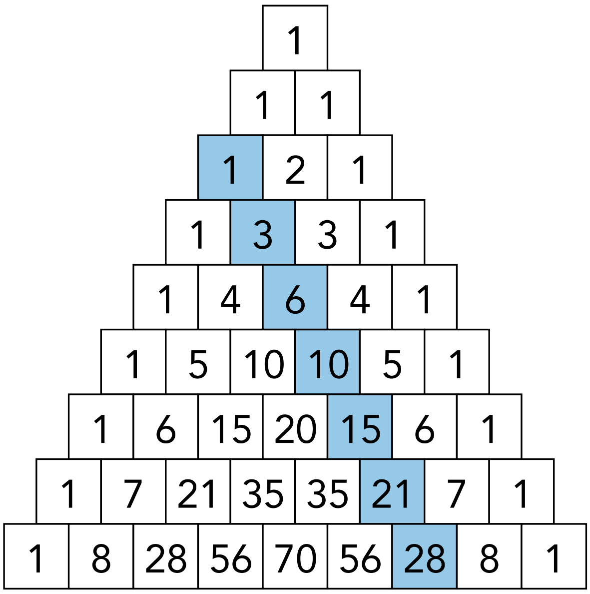
a. Welke getallen herken je hier?
b. Welke eenvoudige figuur kun je maken als je twee opeenvolgende driehoeksgetallen bij elkaar legt? Wat heeft dat met vraag a te maken?
c. Toon aan dat je antwoord altijd klopt door de formules voor het $(n - 1)$-ste en n-de driehoeksgetal bij elkaar op te tellen.

De driehoeksgetallen staan in de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) onder nummer A000217, de rechthoeksgetallen hebben nummer A002378 en de kwadraten A000290.

DRIEHOEK VAN PASCAL De driehoeksgetallen hebben ook te maken met de driehoek van Pascal, die je in figuur 3 ziet. Je krijgt elk getal steeds door de twee getallen erboven bij elkaar op te tellen. De driehoeksgetallen verschijnen in de schuine rij die blauw gekleurd is (en ook aan de andere kant natuurlijk).

Waarom zijn dat nou precies de driehoeksgetallen? Daarvoor kijken we eerst nog wat beter naar de driehoek van Pascal. Het blijkt dat die getallen te maken hebben met het tellen van mogelijke routes.

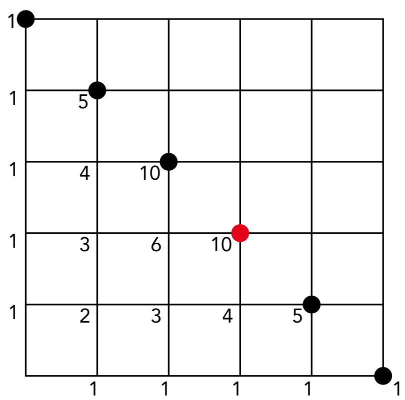
In het rooster in figuur 4 is een punt rood gekleurd. Stel dat je linksonder in het rooster begint met lopen en je mag alleen over de lijntjes naar een volgend roosterpunt, op hoeveel manieren kun je dan via een kortste weg bij het gekleurde punt komen?



Figuur 3 De driehoek van Pascal

Voor elk punt P in het rooster dat niet op de rand ligt geldt: je kunt op twee manieren in dat punt komen, via het punt links ervan en via het punt dat er recht onder ligt. Als je op a manieren in het punt links kunt komen en op b manieren in het punt eronder, kun je uiteraard op $a + b$ manieren in punt P komen. Dus elk getal vind je door het getal links ervan en het getal eronder bij elkaar op te tellen. Omdat je de randpunten slechts op één manier kunt bereiken, krijgen we precies de getallen uit de driehoek van Pascal.

De driehoek van Pascal heeft ook te maken met het aantal manieren waarop je een greep van k dingen kunt doen uit een verzameling van n dingen. Ga maar na: om bij ons gekleurde punt (3, 2) te komen, moeten we vijf stappen zetten. Van die vijf stappen kies je er twee waar je naar boven (b) gaat, de andere drie zet je dan vanzelf naar rechts (r), bijvoorbeeld: bbrrr of rrbrb. Er zijn 10 manieren



Figuur 4 Er zijn 10 kortste routes van linksonder naar het rode punt

SOM VAN STAMBREUKEN MET DRIEHOEKSGETALLEN IN DE NOEMER

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=2.$$

om in het gekleurde punt te komen, en er zijn dus ook 10 van dergelijke rijtjes. Met andere woorden: als je van vijf dingen (letters) er twee moet kiezen (die een b worden), kan dat op 10 manieren. (Het is duidelijk dat uit vijf letters drie letters kiezen die een r worden hetzelfde oplevert, dat klopt ook met de 10 die bij (2, 3) staat.)

Op deze manier correspondeert elk punt in de driehoek van Pascal met een aantal manieren om een greep van k dingen te nemen uit n dingen. Dat aantal schrijven we als $\binom{n}{k}$ (spreek uit: 'n boven k').

De driehoeksgetallen komen dus blijkbaar overeen met de getallen $\binom{n}{2}$. Waarom is dat zo? Nou, als je twee dingen uit een groep van n dingen kiest, heb je voor de eerste keuze n opties, en voor de volgende keuze $n - 1$. Dat levert dus $n(n - 1)$ keuzes op. Maar omdat je dan alle mogelijke paren dubbel meegeteld hebt (als je eerst x gekozen hebt en daarna y heb je uiteindelijk hetzelfde paar als wanneer je eerst y gekozen hebt en daarna x) moet je dat aantal nog door 2 delen. Dat levert dus $\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$ mogelijkheden op. Dat is precies de formule die we al zagen voor de driehoeksgetallen: een half keer een getal keer het volgende getal.

Opgave 3. In een klas van 25 leerlingen geeft iedereen elke andere persoon precies één keer een hand. Hoeveel keer handen schudden is daar in totaal voor nodig?

VOLMAAKTE GETALLEN Een getal waarvan de som van de delers (behalve het getal zelf) gelijk is aan het getal zelf, heet *volmaakt*. Het kleinste volmaakte getal is 6, want de delers zijn 1, 2 en 3, en inderdaad: 1 + 2 + 3 = 6. Het volgende volmaakte getal is 28; zijn delers zijn 1, 2, 4, 7 en 14. De daaropvolgende twee zijn 496 en 8182. Valt je wat op? Al deze volmaakte getallen zijn ook driehoeksgetallen!
Alle bekende volmaakte getallen (zie A000396 in de OEIS) zijn van de vorm $2^{n-1}(2^n - 1)$ (maar niet elk getal van die vorm is volmaakt!). Dat zo'n getal ook een driehoeksgetal is, volgt uit het feit dat $\binom{2^n}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2^n(2^n-1)$.

KWADRATEN Wanneer is een driehoeksgetal tegelijkertijd een kwadraat? Dit is het geval voor 1, 36, 1225, 41616, ... (zie A001110). Er zijn oneindig veel kwadratische driehoeksgetallen. De opeenvolgende elementen uit deze rij blijken eenvoudig uit te rekenen door middel van de recursieve formule $a_{n-1}\,a_{n+1} = (a_n - 1)^2$, ofwel $a_{n+1} = (a_n - 1)^2/a_{n-1}$.

VIERHOEKS-, VIJFHOEKS-, VEELHOEKSGETALLEN Bestaat er een logische manier om net zoals driehoeksgetallen ook vierhoeks-, vijfhoeks-, zeshoeksgetallen, en verder nog, te maken? Bij de driehoeksgetallen begonnen we met 1 bolletje, en vervolgens kwam er steeds een laagje bij zodat we bij het n-de **drie**hoeksgetal **drie** zijden van lengte n hadden. Datzelfde principe kunnen we gebruiken voor veelhoeken met meer dan drie zijden, zoals je in figuur 5, 6 en 7 kunt zien.

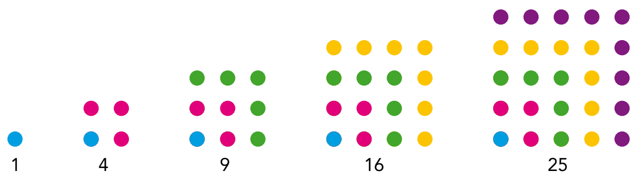
De rij van de vierhoeksgetallen ken je al: dat zijn gewoon de kwadraten. De vijfhoeksgetallen staan in de OEIS onder nummer A000326, de zeshoeksgetallen onder A000384, en ook voor meer zijden zijn de rijen te vinden.

Er zijn getallen die zowel een driehoeks- als een vierhoeksgetal zijn. Die rij getallen begint als volgt: 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, ... en staat in de OEIS onder nummer A001110. Van dergelijke rijen zijn er meer te vinden in de OEIS, rij A048915 bijvoorbeeld bevat de getallen die zowel een negenhoeks- als een vijfhoeksgetal zijn. Voor de veelhoeksgetallen bestaan mooie formules. Voor het vinden daarvan komt onze kennis van de driehoeksgetallen weer van pas, en het blijkt ook dat alle veelhoeksgetallen weer uit te drukken zijn in driehoeksgetallen.

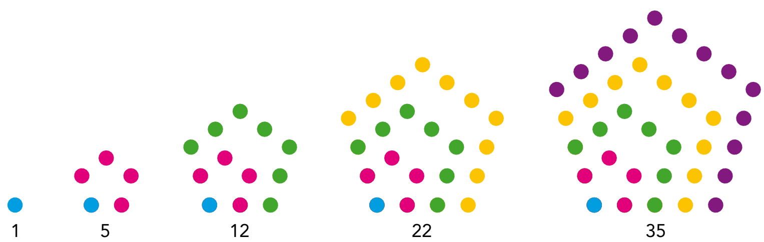
FORMULES VOOR VEELHOEKSGETALLEN

Eerst een notatie-afspraak: met $V_z(n)$ bedoelen we het n-de z-hoeksgetal. Zo kunnen we het zesde driehoeksgetal aanduiden met $V_3(6)$. We gaat op zoek naar een formule voor $V_z(n)$. Voor $V_3(n)$ kennen we die al: $V_3(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ Daar zien we echter niet heel duidelijk hoe het aantal zijden een rol speelt. We gaan dus eerst onderzoeken wat er bij $V_4(n)$ en $V_5(n)$ gebeurt, in de hoop een patroon te herkennen.

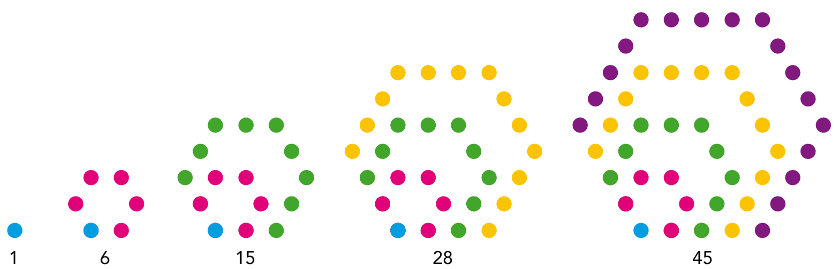
Opgave 4.
a. Hoeveel bolletjes moeten we bij $V_4(n)$ toevoegen om $V_4(n+1)$ te krijgen? Kijk goed naar figuur 5.
b. En hoe zit dat bij de vijfhoeksgetallen (figuur 6)? En bij de zeshoeksgetallen (figuur 7)?



Figuur 5 De eerste vijf vierhoeksgetallen



Figuur 6 De eerste vijf vijfhoeksgetallen



Figuur 7 De eerste vijf zeshoeksgetallen

TETRAËDERGETALLEN Tel de eerste n driehoeksgetallen bij elkaar op. Er geldt dat $1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}\,n(n + 1) = \frac{1}{6}\,n(n + 1)(n + 2)$. Dit zijn de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n+2}{3}$ (zie A000292). Deze getallen staan ook bekend als de *tetraëdergetallen*. Kun je zelf bedenken waarom?

Je kunt het antwoord op opgave 4 op verschillende manieren vinden. De figuren 8, 9 en 10 geven een manier van kijken die je makkelijk kunt uitbreiden naar veelhoeken met meer zijden. Je plakt er steeds een paar stukjes van lengte n bij, en uiteindelijk kom je één bolletje tekort. Het aantal stukjes dat je erbij plakt, is precies twee minder dan het aantal zijden, omdat je aan twee kanten niks erbij plakt. In formulevorm zie je dus dat

$$V_z(n + 1) = V_z(n) + (z - 2) \cdot n + 1.$$

Kunnen we hiervan een directe formule in termen van z en n maken? We kijken eerst maar eens naar $V_4(n)$. Dan zegt onze formule:

$$V_4(n + 1) = V_4(n) + 2n + 1.$$

Het eerste getal van elke rij is 1, dus $V_4(1) = 1$.

Daarna tellen we bij elke stap $2n + 1$ erbij op. Dat betekent dus:

$$V_4(n) = 1 + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + \cdots + (2 \cdot (n - 1) + 1).$$

(De laatste term heeft als aantal bolletjes dat er per zijde bij komt $n - 1$, omdat de vorige figuur zijdes van lengte $n - 1$ had.) Die termen kunnen we op de volgende manier herordenen:

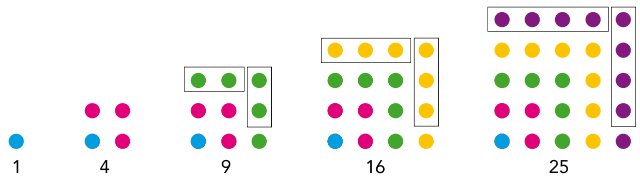
$$V_4(n) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)) + n \cdot 1.$$

En nu komen de driehoeksgetallen weer van pas: we weten dat $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)$ gelijk is aan het $(n - 1)$-ste driehoeksgetal, dus $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)n$. Dus

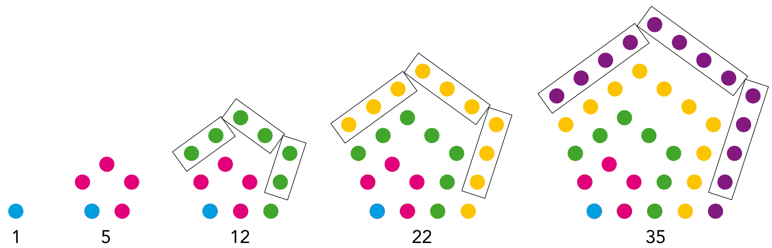
$$V_4(n) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(n - 1)n + n = (n - 1)n + n.$$

Of, als we liever een uitdrukking in termen van de driehoeksgetallen willen:

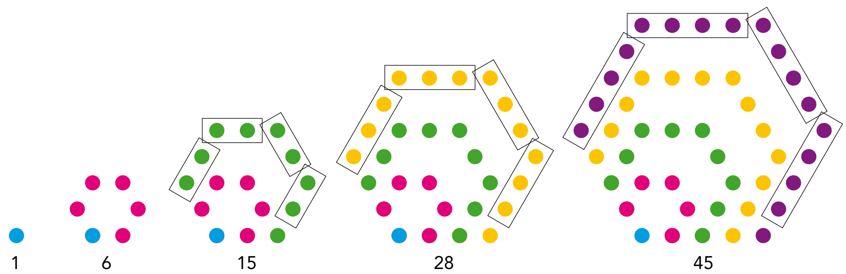
$$V_4(n) = 2 \cdot V_3(n - 1) + n.$$



Figuur 8 Hoeveel bolletjes moet je bij $V_4(n)$ toevoegen om $V_4(n + 1)$ te krijgen?



Figuur 9 Hoeveel bolletjes moet je bij $V_5(n)$ toevoegen om $V_5(n + 1)$ te krijgen?



Figuur 10 Hoeveel bolletjes moet je bij $V_6(n)$ toevoegen om $V_6(n + 1)$ te krijgen?

PRIJSVRAAG: BEDENK ZELF EEN RIJ Bedenk zelf een getallenrij die nog niet voorkomt in de OEIS. Uiteraard geldt: hoe origineler, hoe beter. Er wordt 200 euro aan prijzengeld verdeeld onder de inzenders met interessante getallenrijen. Maar de hoofdprijs is eeuwige roem: vermelding van je rij in de OEIS! Stuur je rij naar **prijsvraag@pyth.eu**. Vermeld je naam, adres, leeftijd, school en klas. Je inzending moet uiterlijk op 15 april 2016 bij ons binnen zijn. Wie voor 1 januari een getallenrij instuurt waarin het getal 2016 voorkomt, dingt mee naar een extra prijs.

DERDEMACHTEN Tel de eerste n derdemachten bij elkaar op. Er geldt dat $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{1}{2}\, n(n+1))^2$. Hé, hier verschijnen de kwadraten van de driehoeksgetallen (zie A000537)!

Opgave 5. Probeer op dezelfde manier $V_5(n)$ en $V_6(n)$ uit te drukken in termen van $V_3(n-1)$ en n.

Waarschijnlijk zie je nu wel in dat de algemene formule is:

$$V_z(n) = (z-2) \cdot V_3(n-1) + n.$$

Opgave 6. Het is ook mogelijk om $V_z(n)$ alleen in termen van driehoeksgetallen uit te drukken, dus zonder nog losse termen in n erbij: $V_z(n) = (z-3) \cdot V_3(n-1) + V_3(n)$. Toon aan dat deze formule ook klopt.

Omdat we voor $V_3(n-1)$ een mooie formule hebben, kunnen we de algemene formule ook omschrijven naar een formule in termen van alleen n en z:

$$\begin{aligned} V_z(n) &= (z-2) \cdot V_3(n-1) + n \\ &= (z-2) \cdot \tfrac{1}{2}\,(n-1)n + n \\ &= \tfrac{1}{2}\, n(z-2)(n-1) + \tfrac{1}{2}\, n \cdot 2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, n(zn - 2n - z + 2 + 2) \\ &= \tfrac{1}{2}\, n((z-2)n + 4 - z). \end{aligned}$$

En dat leidt tot het volgende mooie rijtje:

$$\begin{aligned} V_3(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(n+1), \\ V_4(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(2n+0)\ [= n^2], \\ V_5(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(3n-1), \\ V_6(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(4n-2), \\ V_7(n) &= \tfrac{1}{2}\, n(5n-3), \end{aligned}$$

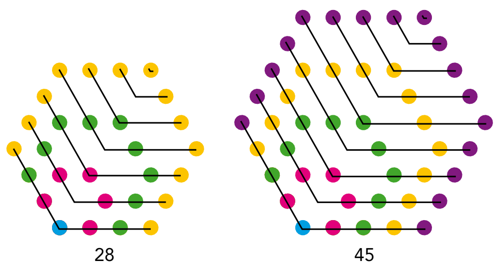
enzovoorts.

DEELRIJEN De rij zeshoeksgetallen 1, 6, 15, 28, 45, ... lijkt alleen maar getallen te bevatten die ook in de rij driehoeksgetallen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... staan. Zo te zien is de rij zeshoeksgetallen een deelrij van de driehoeksgetallen, waarbij steeds één getal wordt overgeslagen. Met behulp van onze formules kunnen we dat nu inderdaad laten zien!

Opgave 7. Probeer zelf af te leiden dat $V_6(n) = V_3(2n-1)$.

Als je goed kijkt, kun je ook in de plaatjes van de zeshoeksgetallen de driehoeksgetallen inderdaad terugvinden als som van het aantal bolletjes op bepaalde lijnen (zie figuur 11).

Opgave 8.
a. Het getal 2016 is een driehoeksgetal! Het hoeveelste driehoeksgetal is dat?
b. Is 2016 misschien ook een zeshoeksgetal? Of nog een ander veelhoeksgetal? ■



Figuur 11 De driehoeksgetallen zijn terug te vinden in de plaatjes van de zeshoeksgetallen.

BREUKEN IN DECIMALEN

■ door Arnout Jaspers

Zelfs simpele rekenkunde kan nog verrassingen opleveren. Pak je rekenmachientje en deel twee willekeurige, even lange gehele getallen op elkaar. Bijvoorbeeld: $\frac{37}{54} = 0{,}685185185...$ (meer decimalen laat een gewoon rekenmachientje niet zien).

Bereken nu $\frac{0{,}373737}{0{,}545454}$ en je ziet dat ook hier 0,685185185... uitkomt! Dit is geen toeval; voor elke twee natuurlijke getallen n en m is $\frac{n}{m}$ gelijk aan $\frac{0{,}[n][n][n]***}{0{,}[m][m][m]***}$ waarbij de [haakjes] de cijfers van het getal aangeven, en $***$ betekent dat je die zo vaak mag herhalen als je wilt, eventueel oneindig vaak.

Het werkt ook met getallen die niet even lang zijn, maar dan moet je ze aanvullen met nullen. Bijvoorbeeld:

$$\frac{16}{173} = \frac{016}{173} = \frac{0{,}016016016}{0{,}173173173} = 0{,}092485549...$$

of

$$\frac{163}{17} = \frac{163}{017} = \frac{0{,}163163163}{0{,}017017017} = 9{,}588235294...$$

Straks zullen we dit bewijzen, maar eerst nog even een paar stappen terug. Elke breuk $\frac{n}{m}$ is te schrijven als een decimaal getal, met achter de komma
(1) ofwel een beperkt aantal cijfers (en verder alleen nullen); bijvoorbeeld $\frac{3}{8} = 0{,}375\overline{0}$;
(2) ofwel een oneindige herhaling van hetzelfde groepje cijfers (eventueel na een eindig beginstuk met unieke cijfers); bijvoorbeeld $\frac{3}{11} = 0{,}\overline{27}$ of $\frac{13}{36} = 0{,}36\overline{1}$.
(De streep boven een groepje cijfers geeft aan dat dat groepje oneindig lang herhaald wordt.)

Geldt het omgekeerde ook? Is elk decimaal getal van de vorm (1) of (2) te schrijven als een breuk?

Categorie (1) is eenvoudig. Als er k cijfers achter de komma staan, zet je die k cijfers in de teller en 10^k (een 1 met k nullen) in de noemer. Dus 0,3104335 wordt $\frac{3.104.335}{10.000.000}$. Is deze breuk nog te vereenvoudigen? De noemer bevat alleen factoren 2 en 5, dus het hangt ervan af of de teller factoren 2 en 5 bevat. In dit geval zijn er geen factoren 2 en maar één factor 5: $3.104.335 = 5 \times 620.867$, dus $0{,}3104335 = \frac{620.867}{2.000.000}$.

Hoe zit dit met categorie (2)? Als je een willekeurig periodiek decimaal getal opschrijft, bijvoorbeeld $0{,}\overline{4920915}$, is meteen duidelijk dat de breuk $\frac{4.920.915}{10.000.000}$ niet voldoet, want die is immers 0,49209150. En je kunt niet alle decimalen in de teller zetten, want dat zijn er oneindig veel.

Toch is er een verbluffend simpele manier om zo'n periodiek decimaal getal om te zetten in een breuk. Als je hier eerst zelf op wilt puzzelen, lees dan nog niet verder.

Stelling. Elk periodiek decimaal getal $0{,}\overline{[n]}$ is gelijk aan $\frac{n}{999...9}$, waarbij het aantal negens in de noemer gelijk is aan het aantal cijfers van n.

Bijvoorbeeld: $0{,}\overline{4920915} = \frac{4.920.915}{9.999.999}$.

Om een omslachtige notatie te vermijden, nemen we voor het bewijs van de stelling een vaste, wat kleinere waarde voor n, namelijk 492, maar het zal duidelijk zijn dat de redenering voor elke n opgaat.

We willen dus aantonen dat $0{,}\overline{492} = \frac{492}{999}$. Hiertoe beginnen we met 1 te schrijven als $0{,}\overline{9}$. Dat ziet er op het eerste gezicht misschien raar uit, maar deze getallen zijn echt aan elkaar gelijk. Immers, twee getallen zijn aan elkaar gelijk als hun verschil 0 is. En inderdaad: $1 - 0{,}\overline{9} = 0{,}\overline{0} = 0$.

Er geldt dus:

$$1 = 0{,}\overline{9} = 0{,}999 + 0{,}000999 + 0{,}000000999 + \cdots = \frac{999}{1.000} + \frac{999}{1.000.000} + \frac{999}{1.000.000.000} + \cdots$$

Deel nu alles door 999:

$$\frac{1}{999} = \frac{1}{1.000} + \frac{1}{1.000.000} + \frac{1}{1.000.000.000} + \cdots$$

Vermenigvuldig tot slot alles met 492, en we zijn klaar:

$$\frac{492}{999} = \frac{492}{1.000} + \frac{492}{1.000.000} + \frac{492}{1.000.000.000} + \cdots =$$
$$0{,}492 + 0{,}000492 + 0{,}000000492 + \cdots = 0{,}\overline{492}.$$

We komen nu terug op de opmerkelijke eigenschap van breuken aan het begin van dit artikel. Die volgt onmiddellijk uit wat we net hebben bewezen, want (opnieuw aan de hand van een willekeurig voorbeeld):

$$\frac{615}{732} = \frac{0{,}615}{0{,}732} \overset{!}{=} \frac{615}{999} \Big/ \frac{732}{999} = \frac{0{,}\overline{615}}{0{,}\overline{732}}.$$

Waar het uitroepteken staat, wordt de hierboven bewezen stelling gebruikt. ■

De Chinese reststelling is een stelling binnen de getaltheorie. De stelling werd voor het eerst beschreven in de vierde eeuw door de Chinese wiskundige Sun Tzu in zijn *Sun Tzu Suan Jing* (Rekenkundig handboek van Meester Sun). De stelling werd opnieuw in 1247 gepubliceerd door de Chinese wiskundige Qin Jiushao, in zijn *Wiskundige verhandeling in negen secties.*

■ door Paul Levrie (Toegepaste Ingenieurswetenschappen, Universiteit Antwerpen)

今有物 不知其數 三 三數之 賸二 五

De titel van dit artikel beschrijft een wiskundig probleem dat is terug te vinden als probleem 26 in hoofdstuk 3 van het Chinese boek *Sun Tzu Suan Jing* (het volledige boek is hier te vinden: http://ctext.org/Sun Tzu-suan-jing). Het werk dateert uit de vierde eeuw na Christus, en de auteur is Sun Tzu. De oplossing van het probleem staat er ook bij:

二十三

en je onderscheidt met wat moeite 2 keer 10 plus 3 (= 23). Vrij geformuleerd is het probleem het volgende: we zoeken een getal dat rest 2 geeft bij deling door 3, rest 3 bij deling door 5 en rest 2 bij deling door 7. Het is het oudste probleem van deze soort waar we weet van hebben, en dat het een oplossing heeft, volgt uit de stelling in het onderstaande kader.

We herinneren je er aan dat $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ uitgesproken wordt als 'x is congruent met a_1 modulo m_1', en dat dit gewoon betekent dat bij deling van het gehele getal x door m_1 de rest gelijk is aan a_1. Een voorbeeld zal dit duidelijk maken:

$$38 \equiv 2 \pmod{12},$$

want $38 = 3 \cdot 12 + 2$ (als je 38 kokosnoten in stapeltjes van 12 wil leggen, dan blijven er precies 2 over). Verder zijn twee getallen *relatief priem* als ze geen gemeenschappelijke deler hebben (behalve 1). Dus 38 en 12 zijn niet relatief priem (gemene deler 2), maar 17 en 25 wel.

TWEE CONGRUENTIES Probleem 26 van Sun Tzu kunnen we nu ook als volgt schrijven: bepaal een getal x dat voldoet aan

$$x \equiv 2 \pmod{3},$$
$$x \equiv 3 \pmod{5},$$
$$x \equiv 2 \pmod{7}.$$

Maar voor we dit oplossen, proberen we een eenvoudiger geval: bepaal een getal x dat voldoet aan

$$x \equiv 3 \pmod{4},$$
$$x \equiv 6 \pmod{7}.$$

Een dergelijk probleem, met twee congruenties, kunnen we grafisch oplossen (zie figuur 1).We tekenen een rooster met als afmetingen de twee moduli, in dit geval dus 4 en 7, en we nummeren de verschillende vakjes, vertrekkend in de linkerbovenhoek met het getal 1, en dan gaan we verder zoals de pijlen in de figuur aangeven: één vakje naar rechts en één naar beneden. Komen we hierbij aan de onderste rand, dan gaan we boven verder. Komen we aan de rechterrand, dan vullen we vanaf

CHINESE RESTSTELLING

Als $m_1, m_2, \ldots, m_k$ positieve gehele getallen zijn die paarsgewijs relatief priem zijn, en als $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gehele getallen zijn, dan heeft het stelsel

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1},$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2},$$
$$\ldots$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

een oplossing, en die oplossing is uniek modulo m, waarbij $m = m_1 m_2 \cdots m_k$.

五數之　賸三　七　七數之　賸二 問物幾何

						j	
	1	9	17	25	5	13	21
	22	2	10	18	26	6	14
i	15	23	3	11	19	27	7
	8	16	24	4	12	20	28

Figuur 1

links verder aan.

Merk op dat de getallen die in de i-de rij staan allemaal rest i geven bij deling door 4, en de getallen in de j-de kolom hebben rest j bij deling door 7. (Hierbij laten we even rest 4 toe modulo 4 en ook rest 7 modulo 7.) Dit heeft tot gevolg dat de gezochte x in dit geval het getal is dat staat in de derde rij – vanwege $x \equiv 3 \pmod 4$ – en de zesde kolom – wegens $x \equiv 6 \pmod 7$. We vinden dus $x = 27$, en je kan zelf nagaan dat dit klopt.

Dit rooster levert het bewijs van de Chinese reststelling in het geval van de twee moduli 4 en 7.

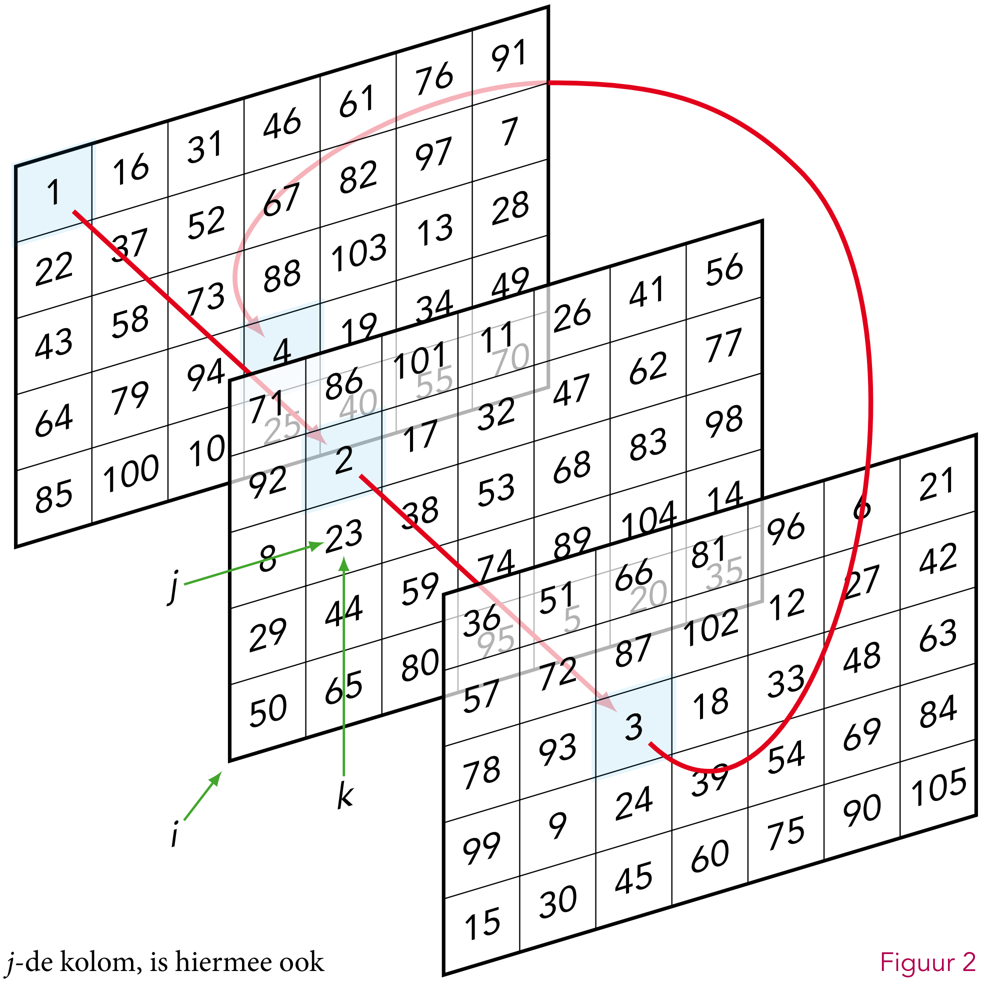
Op dezelfde manier volgt het bewijs voor twee willekeurige moduli m_1 en m_2 als ze relatief priem zijn, want in dat geval krijgen alle vakjes in het overeenkomstige rooster een uniek nummer toebedeeld. Want pas als alle getallen van 1 tot en met $m_1 \cdot m_2$ zijn ingevuld, stopt de bovenstaande procedure. Inderdaad, je kan geen getal meer invullen als je op een vakje stoot dat er al een bevat. Door de gebruikte 'diagonaalmethode' kan dit alleen maar gebeuren als je in het vakje rechtsonder in het rooster bent (zie je waarom?). En daar kan je enkel belanden na een aantal stappen dat een veelvoud is van zowel m_1 (het vakje zit op rij m_1) als van m_2 (het vakje zit in kolom m_2). Als m_1 en m_2 relatief priem zijn, dan gebeurt dit dus na $m_1 \cdot m_2$ stappen. En omdat er precies één getal ligt op de snijding

EEN EIERENPROBLEEM

Een oude vrouw gaat naar de markt om haar eieren te verkopen. Een paard trapt echter op haar eiermand en breekt haar eieren. De eigenaar van het paard wil haar vergoeden, en vraagt hoeveel eieren er in de mand zaten. De vrouw kan zich dat niet herinneren, maar ze weet nog wel dat als ze de eieren er per 6 uitnam, ze 5 eieren overhield, indien ze ze er per 5 uitnam, bleven er 4 over, indien per 4 bleven er 3 over, en per 3 hield ze er 2 over. Hoeveel eieren had de vrouw minstens in haar mand?

Dit probleem is terug te vinden in het boek *Brāhmasphuṭasiddhānta* uit 628 van de Indische wiskundige Brahmagupta. Het verhaaltje is er later rond gebreid.

De eierenkoopvrouw, Hendrick Bloemaert, 1632



Figuur 2

van de i-de rij met de j-de kolom, is hiermee ook bewezen dat er precies één oplossing is modulo $m_1 \cdot m_2$. We hebben dus bewezen dat

$$x \equiv i \pmod{m_1}$$
$$x \equiv j \pmod{m_2}$$

precies één oplossing heeft modulo $m_1 \cdot m_2$ als m_1 en m_2 relatief priem zijn.

DRIE CONGRUENTIES Werken we met drie congruenties, zoals in het probleem van Sun Tzu, dan kunnen we op een soortgelijke manier te werk gaan, maar we hebben wel een dimensie meer nodig. De moduli zijn in dit geval 3, 5 en 7, en we vertrekken dan ook van 3 roosters van 5 op 7 die we, zoals in het vorige voorbeeld, opvullen met de getallen van 1 tot en met 105. Het precieze systeem wordt duidelijk gemaakt in figuur 2.

In het i-de rooster bevinden zich de getallen die rest i geven bij deling door 3. De j-de rij in een rooster bevat de getallen die congruent zijn met j modulo 5, en in de k-de kolom staan de getallen die rest k geven bij deling door 7.

De oplossing van het probleem van Sun Tzu is dus het getal dat in het tweede rooster op de derde rij en in de tweede kolom staat. We vinden daar $x = 23$.

ALGEMENER Met dit systeem kunnen we meer algemeen de Chinese reststelling bewijzen voor drie congruenties met moduli die relatief priem zijn. De argumentatie die we gebruikt hebben in het geval van twee congruenties blijft immers geldig: alle roostervakjes krijgen met deze manier van nummeren een uniek nummer.

Willen we de oplossing wiskundig bepalen, en niet grafisch, dan helpt de volgende redenering. We veronderstellen dat de gezochte oplossing de som is van drie getallen, één per congruentie:

$$x = a + b + c.$$

Als we nu even veronderstellen dat b en c drievouden zijn, dan moeten we a congruent kiezen met 2 om aan de eerste congruentie $x \equiv 2 \pmod 3$ te voldoen:

$$x = a + 3b' + 3c' \text{ en } a \equiv 2 \pmod 3$$
$$\Rightarrow x \equiv 2 \pmod 3.$$

Als we dan bovendien veronderstellen dat a en c vijfvouden zijn, en we kiezen b congruent met 3, dan is er voldaan aan $x \equiv 3 \pmod 5$:

$$x = 5a'' + b + 5c'' \text{ en } b \equiv 3 \pmod 5$$
$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod 5.$$

Ten slotte zorgen we ervoor dat a en b zevenvouden zijn, en kiezen we c congruent met 2:

$$x = 7a''' + 7b''' + c \text{ en } c \equiv 2 \pmod 7$$
$$\Rightarrow x \equiv 2 \pmod 7.$$

Brengen we dit allemaal samen, dan moet
- a een veelvoud zijn van 5 en 7, stel $a = 35A$, met $35A \equiv 2 \pmod 3$;
- b een veelvoud zijn van 3 en 7, stel $b = 21B$, met $21B \equiv 3 \pmod 5$;
- c een veelvoud zijn van 3 en 5, stel $c = 15C$, met $15C \equiv 2 \pmod 7$.

Het gevolg is dat een oplossing van het probleem van Sun Tzu gegeven wordt door

$$x = 35A + 21B + 15C.$$

Rest ons nog de drie volgende kleine problemen op te lossen: bepaal A, B en C zodanig dat

$$35A \equiv 2 \pmod 3,$$
$$21B \equiv 3 \pmod 5,$$
$$15C \equiv 2 \pmod 7.$$

Die kunnen nog verder vereenvoudigd worden, bijvoorbeeld bij de eerste hebben we dat $35A \equiv 2A \pmod 3$, want $35 \equiv 2 \pmod 3$. De congruentie wordt dan: $2A \equiv 2 \pmod 3$. Wat overblijft is dit:

$$2A \equiv 2 \pmod 3,$$
$$B \equiv 3 \pmod 5,$$
$$C \equiv 2 \pmod 7$$

en deze kunnen op zicht opgelost worden: $A = 1$, $B = 3$, en $C = 2$ voldoen. (Voor een andere methode: zie het kader hieronder.) We vinden dan voor x door invullen:

$$x = 35 \cdot 1 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 128$$

en modulo $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ geeft dit de oplossing die we grafisch hebben gevonden. ■

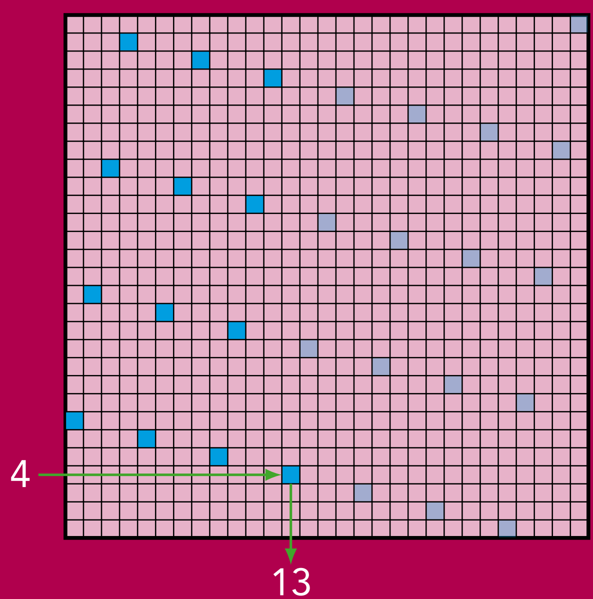
GRAFISCH OPLOSSEN VAN LINEAIRE CONGRUENTIES

Een vergelijking in gehele getallen, van de vorm $ax \equiv c \pmod b$, wordt een lineaire congruentie genoemd. Zo'n lineaire congruentie heeft precies één oplossing die kleiner is dan b, als de getallen a en b relatief priem zijn, dus geen gemeenschappelijke deler hebben. Indien a en b niet te groot zijn, kan je die oplossing grafisch vinden op een blad ruitjespapier.
We bekijken het aan de hand van een voorbeeld:

$$7x \equiv 4 \pmod{29}.$$

Hiervoor bakenen we op het ruitjesblad een vierkant af met zijde 29. En dan beginnen we ruitjes in te kleuren, links onderaan, in de eerste kolom, ruitje 7 hoog. Het volgende ruitje is dan telkens één naar rechts en 7 omhoog, waarbij we op precies dezelfde manier te werk gaan als in figuur 1. Zo wordt er op elke rij en in elke kolom één ruitje ingekleurd.
Als je het ruitje in rij 4 (geteld van onderaan) hebt ingekleurd, dan mag je stoppen. De oplossing van de congruentie is dan het kolomnummer van dit ruitje, in dit geval 13. Dus $x = 13$. Inderdaad:

$$7 \cdot 13 = 91 \equiv 4 \pmod{29}.$$

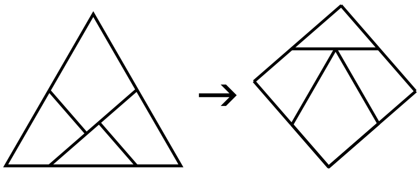


In dit artikel laten we zien hoe je een kubus, een rombendodecaëder en een afgeknotte octaëder kunt omvormen tot een zeszijdig prisma. Om de constructie zelf uit te voeren, heb je de bouwtekeningen nodig die bij dit artikel staan. Kopieer die bouwtekeningen op stevig papier. De tekeningen staan ook op onze website: www.pyth.eu.

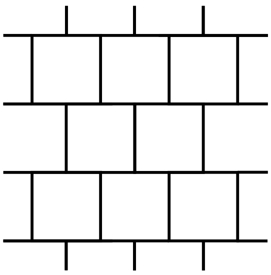
■ door William Verspaandonk

HET IS EEN PRISMA, OF TOCH NIET...

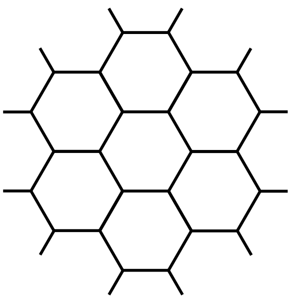
Wereldberoemd is Henry Dudeney's puzzel waarbij je een gelijkzijdige driehoek moet omvormen tot een vierkant (zie figuur 1). Deze puzzel, die in het verleden ook in dit blad is besproken, heeft veel te maken met regelmatige vlakvullingen. Bij een vlakvulling is het de kunst om een oneindig vlak op te vullen door een bepaalde figuur herhaaldelijk te gebruiken. Zonder overlap en zonder gaten, uiteraard. Zo kun je een vlak helemaal vullen met allemaal vierkanten (zie figuur 2). En het lukt ook met bijvoorbeeld gelijkzijdige zeshoeken (zie figuur 3).



Figuur 1 Puzzel uit 1902 van Henry Dudeney



Figuur 2 Met vierkanten kun je het hele vlak vullen



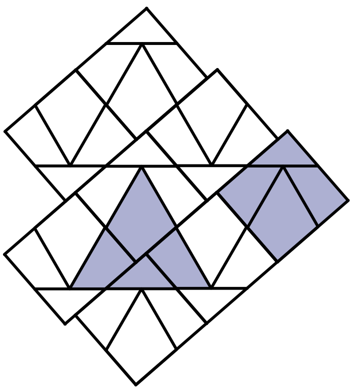
Figuur 3 Met regelmatige zeshoeken kun je het hele vlak vullen

Een meester in het vullen van vlakken met een vast patroon was Maurits Cornelis Escher. Hij heeft veel mooie creaties bedacht, zoals bijvoorbeeld *Reptielen*, *Metamorfose* en *Dag en nacht*.

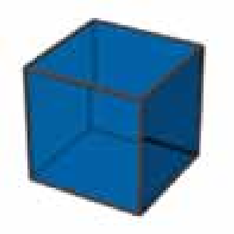
Met behulp van regelmatige vlakvullingen kan worden uitgelegd waarom de constructie van een gelijkzijdige driehoek naar een vierkant mogelijk is. Probeer dat zelf eens uit te zoeken aan de hand van figuur 4.

RUIMTEVULLING Maar in dit artikel willen we het niet over regelmatige vlakvullingen hebben. We gaan een stapje hoger: regelmatige *ruimte*vullingen. We nemen dan een driedimensionale figuur en we gaan er hier een oneindig aantal van stapelen, volgens een vaste methode. Natuurlijk mag er geen ruimte tussen de figuren zitten. Met oneindig veel kubussen kan de hele ruimte worden gevuld – dat is duidelijk.

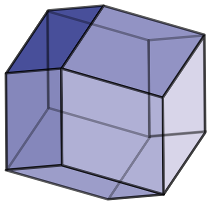
We willen de regelmatige ruimtevullingen ge-



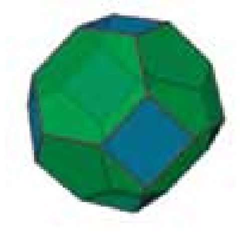
Figuur 4



Figuur 5 De kubus



Figuur 6 De rombendodecaëder



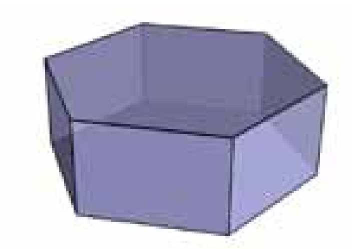
Figuur 7 De afgeknotte octaëder

bruiken als hulpmiddel om uit te leggen hoe we van een gegeven figuur een andere figuur kunnen creëren. Net zoals bij de puzzel van Dudeney: daar wordt van een gelijkzijdige driehoek een vierkant gemaakt.

Laten we eens met de volgende vraag beginnen: wat hebben de kubus (figuur 5), de rombendodecaëder (twaalfvlak waarvan de zijden ruiten zijn; figuur 6) en de afgeknotte octaëder (afgeknot achtvlak; figuur 7) met elkaar gemeen? Hier zijn natuurlijk verschillende antwoorden mogelijk. Zo zijn ze bijvoorbeeld alle convex. Dit wil zeggen dat als we twee willekeurige punten in of op de ruimtelijke figuur nemen en een lijn trekken tussen deze punten, ook alle punten op die lijn bij de ruimtelijke figuur horen. Dit is duidelijk niet het geval bij een ster.

Een andere (verrassende) gemeenschappelijke eigenschap is dat ze ruimtevullend zijn. Voor de kubus hadden we dit al opgemerkt. Maar ook voor de andere twee figuren kan een ruimte helemaal worden opgevuld zonder dat er gaten vallen.

Nog een andere eigenschap die ze bezitten, is dat ze zijn te vervormen tot een vierzijdig prisma en tot een zeszijdig prisma. De kubus is trouwens een voorbeeld van een vierzijdig prisma. Figuur 8 toont



Figuur 8 Het zeszijdig prisma

een voorbeeld van een zeszijdig prisma. Het vierzijdig prisma en het zeszijdig prisma zijn ook ruimtevullende figuren.

We gaan onderzoeken hoe we een zeszijdig prisma kunnen vormen uit de kubus, de rombendodecaëder en de afgeknotte octaëder. De methode om het vierzijdig prisma te maken is vergelijkbaar, maar bespreken we hier niet. Voor de kubus, de rombendodecaëder en de afgeknotte octaëder geven we eveneens bouwtekeningen waarmee je het zeszijdig prisma kan maken. Het is leuk om dat te doen, zelfs als je de beschreven methode niet helemaal begrijpt!

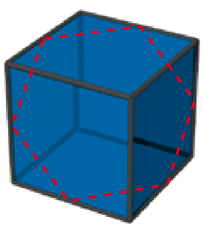
DE METHODE We zullen de figuren in stukken snijden zodat ze kunnen worden omgeklapt, waardoor het prisma ontstaat. De mooie constructie van de afgeknotte octaëder naar het zeszijdig prisma is ontdekt door Anton Hanegraaf (1931-2001).

Zou er een verband bestaan tussen de ruimtevullende eigenschap en het vervormen van de ruimtelijke figuren in een vierzijdig of zeszijdig prisma? Ja, dat is er. De losse omklapbare delen van deze drie figuren kunnen worden beschouwd als delen van de omringende figuren in een ruimtevulling.

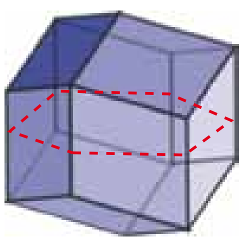
Hoe gaan we nu te werk om de transformatie naar het vier- of zeszijdig prisma voor elkaar te krijgen? We leggen het uit voor het zeszijdig prisma.

Bij ieder van de figuren gaan we op zoek naar een verborgen zeshoek die ieder van deze figuren precies doormidden snijdt. Dus de manier van snijden is van groot belang. De figuren 9, 10 en 11 laten zien dat het bij alle drie figuren mogelijk is.

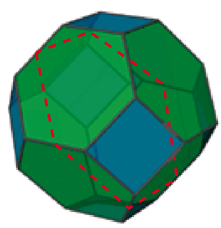
Deze zeshoek gebruiken we als hulpmiddel. We



Figuur 9



Figuur 10



Figuur 11

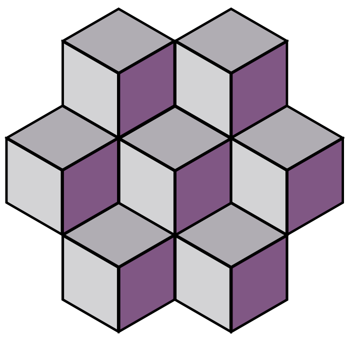
gaan de drie figuren zo draaien dat als je er van bovenaf naar kijkt, je de zeshoek ziet. Nu gaan we de ruimte verder vullen. Dit doen we alleen maar door de figuur te omsluiten met dezelfde figuur.

In figuur 12 zie je het bovenaanzicht van zeven kubussen of van zeven rombendodecaëders. Deze aanzichten zijn dus identiek! Figuur 13 toont twee bovenaanzichten van gestapelde, afgeknotte octaeders. Zo'n aanzicht is heel anders dan die van de kubussen of rombendodecaëders. Dat komt doordat de afgeknotte octaëders niet mooi op dezelfde hoogte zitten, zoals bij de kubussen en de rombendodecaëders het geval is. In de linker figuur is de middelste afgeknotte octaëder het hoogst geplaatst en de afgeknotte octaëders bovenaan, linksonder en rechtsonder zitten hier net onder. De overige drie afgeknotte octaëders zitten weer iets lager. In de rechter figuur bevindt de afgeknotte octaëder rechtsonder zich het hoogst en die linksboven het laagst. De overige zitten er in hoogte stapsgewijs tussenin. Het is goed te zien dat de afgeknotte octaeders anders zijn gerangschikt dan de kubussen en de rombendodecaëders. Ook is te zien dat de figuren de gehele ruimte opvullen als we verder zouden gaan stapelen.

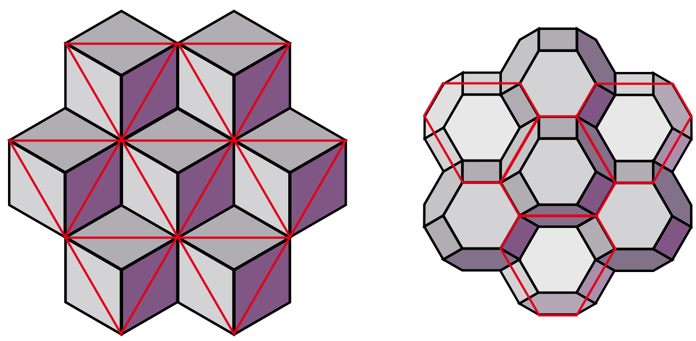
De volgende stap is het verder stapelen totdat de middelste kubus, rombendodecaëder en afgeknotte octaëder helemaal zijn omsloten. Dan gaan we evenwijdig snijden aan het grondvlak en aan de (verborgen) zeshoek van de figuren. Bij de kubus en de rombendodecaëder snijden we op de hoogte van drie hoeken. Bij de afgeknotte octaëder snijden we door de drie ribben die de vierkanten scheiden van de zeshoeken. In figuur 14 is dit weergegeven met rode lijnen. Het volledig vullen is echter weggelaten.

Na het snijden zie je herhalende patronen terugkeren (zie figuur 15). Dit komt doordat de hele ruimte systematisch is opgevuld met een vaste structuur. Bij ieder van de middelste figuren is de bovenzijde verdwenen. Bij de drie aangrenzende figuren is een even zo groot stuk blijven zitten. Dus het verwijderde bovenstuk is in volume even groot als ieder van de drie omliggende, aangrenzende stukken (alle wit weergegeven). Als we van ieder van deze drie stukken een derde deel zouden nemen, zoals is weergegeven met de gestippelde zeshoek, dan kunnen we dit weer bovenop de middelste figuur plaatsen om het weer volledig te maken. Bij de afgeknotte octaëder moet alleen het deel dat wit is, en niet het donkere gedeelte, worden gebruikt.

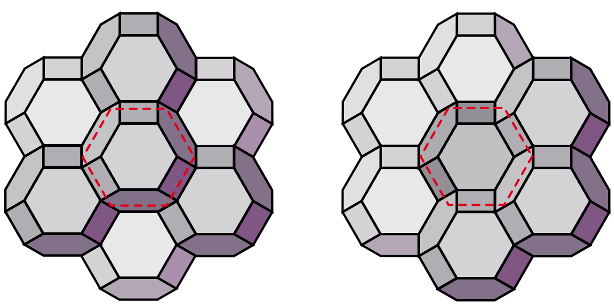
Dus bij de afgeknotte octaëder lijken in de zeshoek nog 'gaten' te zitten. Het donkere gedeelte bin-



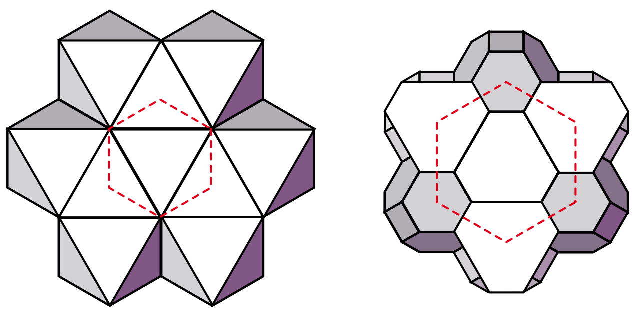
Figuur 12 Bovenaanzicht ruimtevulling kubus én rombendodecaëder



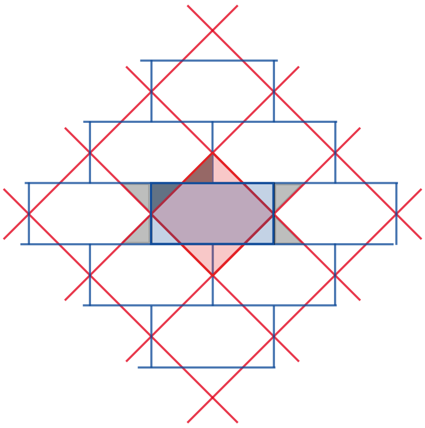
Figuur 14 De wijze van doorsnijding bij kubus én rombendodecaëder (links) en afgeknotte octaëder (rechts)



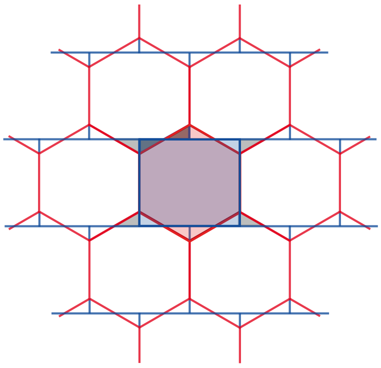
Figuur 13 Twee bovenaanzichten ruimtevulling afgeknotte octaëder



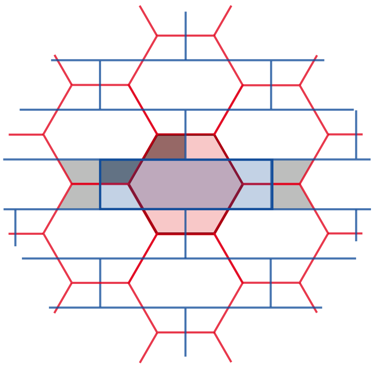
Figuur 15 Doorsnijding kubus én rombendodecaëder (links) en afgeknotte octaëder (rechts)



Figuur 16 Doorsnijding kubus



Figuur 17 Doorsnijding zeshoek (romben-dodecaëder)



Figuur 18 Doorsnijding zeshoek (afgeknotte octaëder)

nen de zeshoek lijkt niet te worden gebruikt, maar dit is niet zo, zoals we zullen zien. Bij de kubus, de rombendodecaëder en de afgeknotte octaëder hebben we alleen maar gezorgd dat de bovenkant van de figuren vlak kan worden afgesneden en weer kan worden gereconstrueerd met de omliggende delen.

Op precies dezelfde wijze kun je aan de onderkant snijden. Hierdoor worden de 'gaten' bij de afgeknotte octaëder opgevuld en ontstaat de zeshoek. Het lijkt dat de 'gaten' kleiner zijn. In oppervlakte klopt dit wel, maar niet in volume. Aan de onderzijde is een vergelijkbaar patroon te zien, maar dan (60 graden) gedraaid. Dit komt door de manier van stapelen van de afgeknotte octaëders.

Bij de kubus en de rombendodecaëder geeft de rode gestippelde zeshoek de omtrek aan van deze twee figuren, maar ook de omtrek van het zeszijdig prisma. Bij de afgeknotte octaëder ontstaat de omtrek van het prisma pas bij de constructie. Daardoor is deze prisma moeilijker om te vinden.

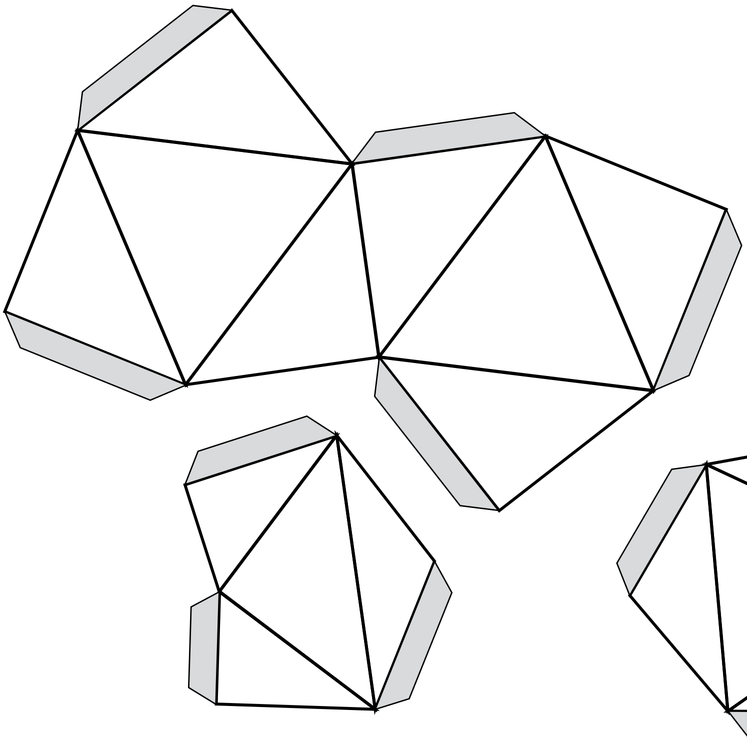
Als we nu even de regelmatige vlakvulling erbij halen, kunnen we de kubus en de rombendodecaëder vergelijken met twee figuren in het platte vlak, namelijk het vierkant en de gelijkzijdige zeshoek. Als we van het vierkant aan de onderkant en bovenkant een hoek afsnijden, kunnen we de helft van ieder van de twee overgebleven hoeken (dit is een hoek van de blauwe rechthoek) gebruiken om de hoek weer te construeren. Op dezelfde manier kunnen we dat doen met de zeshoek. In de vlakvullingen van figuur 16 en 17 zijn in grijs de hoeken weergegeven. Het is duidelijk te zien dat zowel het vierkant als de zeshoek (in rood) kunnen worden omgevormd tot rechthoeken (blauw).

Voor de afgeknotte octaëder hebben we niet direct een vergelijkbare situatie in het platte vlak voor handen. Maar een die dicht in de buurt komt, is weergegeven in figuur 18. Ook hier snijden we de zeshoek, maar op een iets andere manier. Op deze manier wordt de blauwe rechthoek breder dan de zeshoek. Bij de andere vlakvullingen gebeurt dit niet.

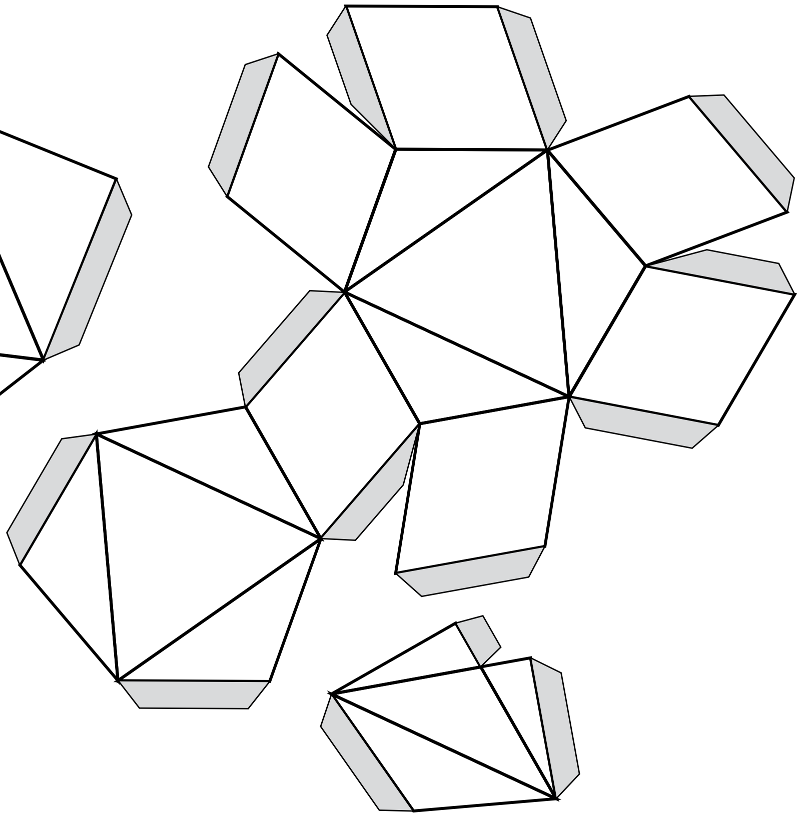
Hiermee zijn de ingrediënten voor het maken van de bouwtekeningen klaar (zie figuur 19-21 op pagina 18). We krijgen bij de drie figuren een middenstuk en een boven- en onderstuk. Het boven- en onderstuk bestaan dan ieder weer uit drie identieke delen. Deze zorgen ervoor dat de kubus, de rombendodecaëder en de afgeknotte octaëder kunnen worden omgevormd tot een zeszijdig prisma.

DE CONSTRUCTIE In de figuren 22, 23 en 24 is te zien hoe de delen ten opzichte van elkaar moeten worden geplaatst. Door gekleurd papier als extra laagje over de onderdelen te plakken, kunnen de onderdelen aan elkaar worden bevestigd en krijgt het geheel een mooie uitstraling. Een eenvoudigere, maar iets minder mooie manier om de delen aan elkaar te bevestigen, is door de onderdelen met plakband aan elkaar te lijmen. In dit geval kunnen de onderdelen zelf van gekleurd papier of karton worden gemaakt.

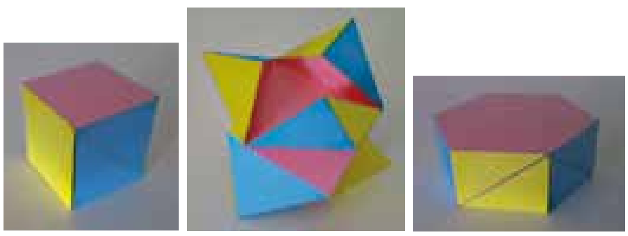
Op de middelste foto is steeds de tussenstap te zien tussen de oorspronkelijke figuur en het zeszijdige prisma. Je ziet daar ook hoe je de onderdelen aan elkaar moet bevestigen. ■



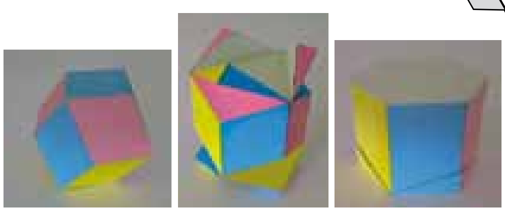
Figuur 19 Bouwtekening kubus. De kleine uitslag is zes keer nodig, de grote één keer.



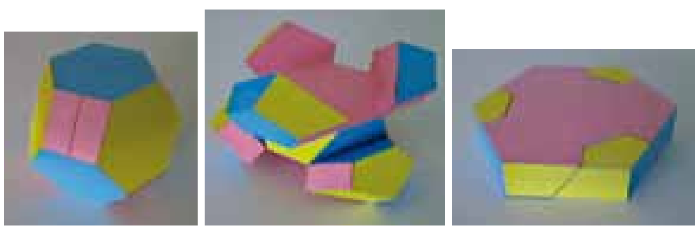
Figuur 20 Bouwtekening rombendodecaëder. De kleine uitslag is zes keer nodig, de grote één keer.



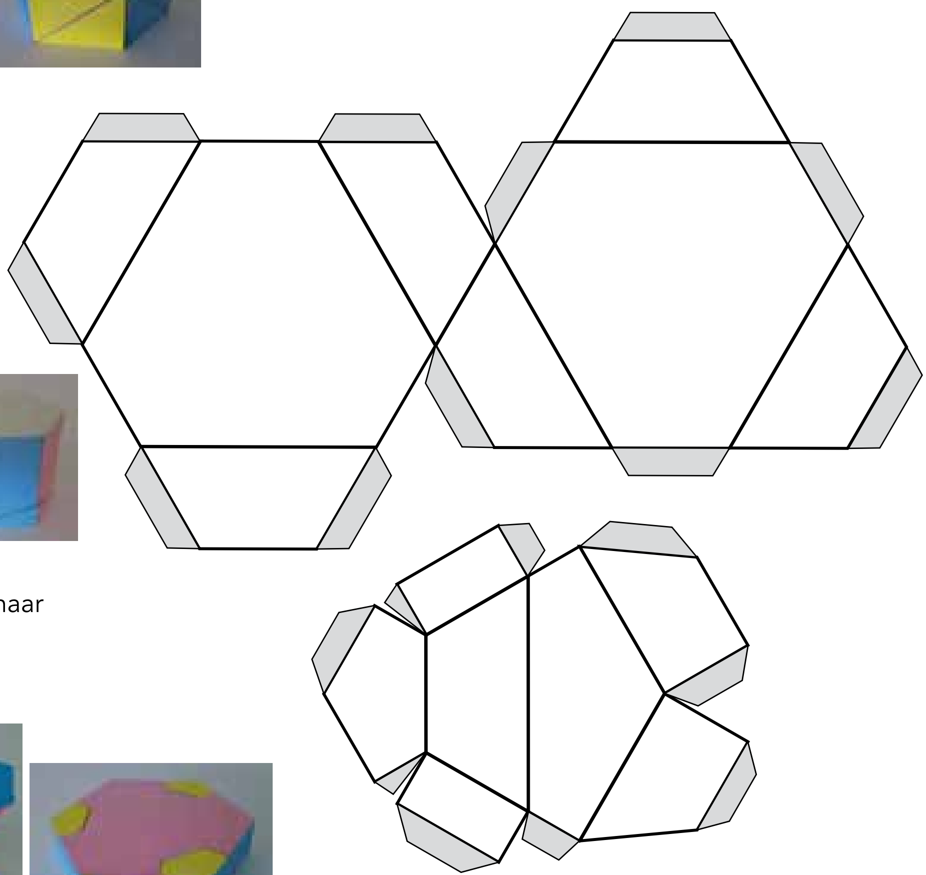
Figuur 22 Van kubus naar zeszijdig prisma



Figuur 23 Van rombendodecaëder naar zeszijdig prisma



Figuur 24 Van afgeknotte octaëder naar zeszijdig prisma



Figuur 21 Bouwtekening afgeknotte octa-eder. De kleine uitslag is zes keer nodig, de grote één keer.

EEN BIZARRE RIJ

■ door Alex van den Brandhof

Achter vrijwel elke getallenrij schuilt een patroon, een regelmaat, een formule. Maar wat te denken van de volgende rij?

0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, ...

Deze rij is een curiositeit. Een verband met enig probleem uit welke tak van wiskunde ook – getaltheorie, meetkunde, combinatoriek, noem maar op – lijkt er niet te zijn. Misschien dat ooit iemand nog zo'n verband vindt, maar tot op heden is bovenstaande getallenrij eenzamer dan eenzaam.

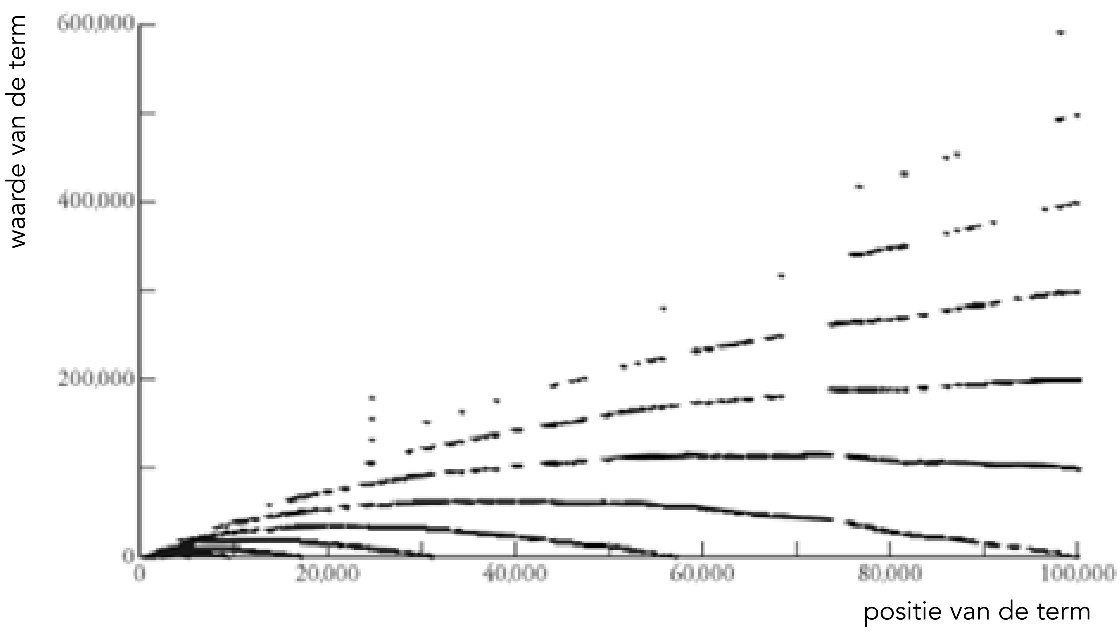
Neemt niet weg dat het recept van de rij simpel is. Begin, per definitie, met 0. Dit noemen we, voor het gemak, de nulde term. Voor de n-de term geldt: bekijk de voorgaande term en trek daar n van af, of – als dat een negatieve uitkomst oplevert of een getal dat al voorkwam in de rij – tel er n bij op. Kort gezegd: trek af indien mogelijk, en tel anders op.

Voor de eerste term moet je dus 1 optellen bij 0 (niet aftrekken, want dan is de uitkomst negatief); dat geeft 1. Voor de tweede term moet je 2 optellen bij 1 (niet aftrekken, want dan is de uitkomst negatief); dat geeft 3. Voor de derde term tel je 3 op bij 3 (niet aftrekken, want 0 hadden we al); dat geeft 6. Voor de vierde term trek je 4 af van 6; dat geeft 2 (dit getal is positief én kwam nog niet in de rij voor). Vervolgens tel je er 5 bij op, dan tel je er 6 bij op, dan trek je er 7 van af, enzovoort.

Voldoet de rij aan enige wetmatigheid die te vangen is in een formule? De getallen worden niet alsmaar groter, of alsmaar kleiner, maar schommelen op een onvoorspelbare manier heen en weer. Niemand die er iets zinnigs over kan zeggen. Ook de vraag of elk (positief, geheel) getal een keer voorkomt, is onbeantwoord.

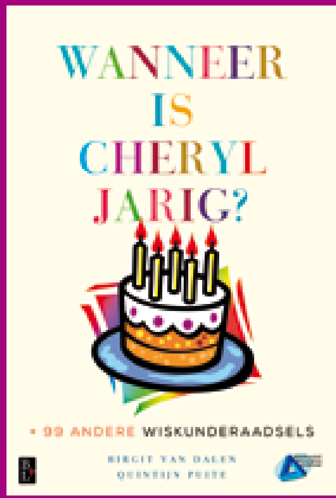
Deze bizarre getallenrij, bedacht door de Colombiaan Bernardo Recamán Santos, is een absolute favoriet van Neil Sloane, de voorman van de *Online Encyclopedia of Integer Sequences*. In de OEIS is de rij te vinden onder nummer A005132. Sloane liet zijn computer de eerste 10^{25} termen van Recamán Santos' rij berekenen. Het getal 4 duikt pas op in de rij op de 131ste plaats. Het getal 19 is de 99.734de term. En voor 61 en 879 moeten we de 100.000ste term passeren: ze staan op plek 181.653 respectievelijk 328.002. Onder de eerste 10^{25} termen is 852.655 het kleinste getal dat niet voorkomt. Of 852.655 ooit zal opduiken, weet niemand.

Op de website van OEIS staat een grafiek van de eerste 100.000 termen van Recamán Santos' rij. Hij is hieronder afgedrukt. De dikke lijnen zijn in feite allemaal losse punten; door de schaal klonteren de punten samen tot ogenschijnlijk vloeiende lijnen. 'Het is interessant om te zien hoeveel orde je in chaos kan brengen', zegt Sloane zelf over deze grafiek. ■



VROLIJKE RAADSELS

■ door Derk Pik



In april ging het volgende probleem de wereld over. Albert en Bernard hebben net Cheryl leren kennen en ze willen weten wanneer ze jarig is. Cheryl geeft hen een lijst met tien mogelijke data: 15, 16 of 19 mei, 17 of 18 juni, 14 of 16 juli, of 14, 15 of 17 augustus. Daarna vertelt Cheryl aan Albert in welke maand ze jarig is en aan Bernard op welke dag ze jarig is. Albert zegt vervolgens: 'Ik weet niet wanneer Cheryl jarig is, maar ik weet dat Bernard het ook niet weet.' Bernard reageert: 'Eerst wist ik niet wanneer Cheryl jarig is, maar nu weet ik het wel,' waarop Albert concludeert: 'Dan weet ik ook wanneer ze jarig is.' Weet jij nu ook wanneer Cheryl jarig is?

DWDD Het probleem werd populair vanaf het moment dat een tv-presentator uit Singapore het raadsel, gebruikt bij de Singaporese Wiskunde Olympiade, op zijn Facebookpagina had gezet. Ook in Nederland werd er veel aandacht aan besteed, onder andere in het programma *De Wereld Draait Door*.

Quintijn Puite was daar op bezoek, samen met Mike Daas, Dirk van Bree en Levi van der Pol, drie leden van het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Dirk legde het probleem glashelder uit en presentator Matthijs van Nieuwkerk, die eerst geen idee had en nog over een opkomende hoofdpijn klaagde, verzuchtte: wat gemakkelijk!

Ook Mike en Levi mochten een probleem uitleggen. Het was opvallend hoe goed deze kandidaten dat konden. De uitzending kun je terugkijken op internet: http://goo.gl/ZvnXux.

Kort daarna vroeg een uitgever aan Quintijn, coach van het nationale olympiadeteam, om een boek te schrijven met soortgelijke problemen. Die uitdaging nam hij aan: in de zomer bedacht hij samen met Birgit van Dalen, eveneens coach, honderd raadsels, voor een deel afkomstig van of geïnspireerd op olympiadeopgaven.

GEEN SCHOOLWISKUNDE Een half jaar later ligt het boek al in de boekhandel. Het is een vrolijk boek geworden. Raadsels zijn gerubriceerd onder titels als *Feesten en Partijen*, *Wijn en Limonade*, *Munten en Dukaten* of *Sprookjes*. Doorbladeren van het boek laat meteen zien dat de opgaven met veel fantasie zijn ingepakt. Het is erg leuk om jezelf maar vooral ook anderen (je ouders?) aan het denken te zetten. Expliciete bovenbouwwiskunde is niet nodig; de meeste problemen zijn zelfs aan basisscholieren uit te leggen. Maar vergis je niet, veel raadsels zijn zeer pittig!

Het boek is handig georganiseerd. De opgaven staan steeds op een rechterpagina, onderaan staat een hint en de uitwerking komt op de volgende pagina links, dus na omslaan. Zo kan je het eerst zelf proberen, zonder dat je direct de oplossing ziet. Maar om te kijken of je het goed hebt gedaan, hoef je niet helemaal naar achteren te bladeren om de oplossing te vinden.

We geven als smaakmaker nog een probleem uit het boek.

QUIZ In een televisiequiz mag je kiezen uit twee deuren. Achter elke deur zit ofwel een geit ofwel een prachtige nieuwe auto. Het is mogelijk dat achter beide deuren een geit zit, of juist achter beide deuren een auto. Om je te helpen, zitten er bordjes op beide deuren (zie illustratie). De quizmaster vertelt erbij dat een van de twee bordjes waar is en het andere niet. Welke deur moet je kiezen om de auto in de wacht te slepen? ■

Birgit van Dalen en Quintijn Puite, *Wanneer is Cheryl jarig? + 99 andere wiskunderaadsels.* Bertram + de Leeuw Uitgevers. € 14,95.

De Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) is met bijna 600 deelnemers uit meer dan 100 landen de grootste wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Elk land vaardigt haar zes beste leerlingen af naar deze wedstrijd, die dit jaar in Thailand werd gehouden. De deelnemers kregen verspreid over twee dagen negen uur de tijd om zes vraagstukken op te lossen. Dirk van Bree, een van de leerlingen van het Nederlandse team, vertelt over zijn ervaringen met de eerste opgave.

■ door Dirk van Bree

EXCENTRIEKE VERZAMELINGEN

Thailand is een leuk land. Je hebt tempels, mooie bossen en een heleboel olifanten. En afgelopen zomer ook nog eens zes moeilijke wiskundeproblemen. Mijn favoriete opgave ging over evenwichtige en excentrieke verzamelingen van punten in een vlak.

Opgave 1 (IMO 2015). We noemen een eindige verzameling $\boldsymbol{S}$ van punten in het vlak *evenwichtig* als er voor elk tweetal verschillende punten A en B in $\boldsymbol{S}$ een punt C in $\boldsymbol{S}$ is zodanig dat $|AC| = |BC|$. We zeggen dat $\boldsymbol{S}$ *excentriek* is als er voor elk drietal verschillende punten A, B en C in $\boldsymbol{S}$ geen punt P in $\boldsymbol{S}$ is zodanig dat $|PA| = |PB| = |PC|$.

a. Bewijs dat er voor alle gehele getallen $n \geq 3$ een evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

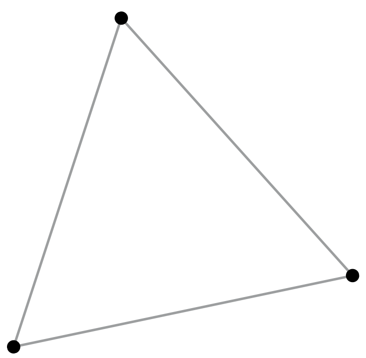
b. Bepaal alle gehele getallen $n \geq 3$ waarvoor er een excentrieke evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

Je ziet, in deze opgave worden twee nieuwe woorden geïntroduceerd: *evenwichtig* en *excentriek*. We bedenken zelf ook nog een nieuw woord: als geldt dat $|AC| = |BC|$, dan noemen we C een *evenwichtspunt* van A en B. Een evenwichtige verzameling is dus een verzameling waarbij voor elke twee punten een evenwichtspunt bestaat dat ook in de verzameling zit.

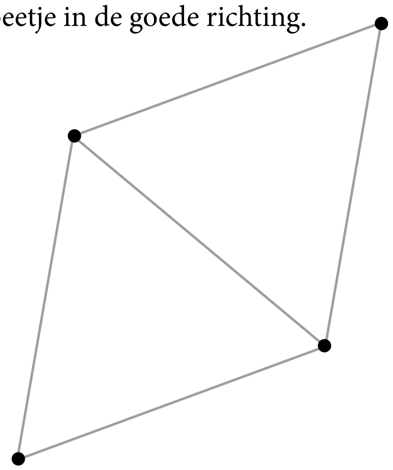
VRAAG A Laten we eerst eens kijken of we überhaupt een evenwichtige verzameling kunnen bedenken, bijvoorbeeld een evenwichtige verzameling met 3 punten. Die is niet al te moeilijk: de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek voldoen (zie figuur 1). Er geldt namelijk dat voor elk tweetal punten het derde punt een evenwichtspunt is. Dit is waar, omdat alle zijden van de driehoek even lang zijn.

Voor 4 punten dan? Na wat gepruts heb ik het volgende gevonden: plak twee gelijkzijdige driehoeken bij een zijde aan elkaar (zie figuur 2). Het is makkelijk controleerbaar dat welke twee punten je ook kiest, er een derde evenwichtspunt bestaat.

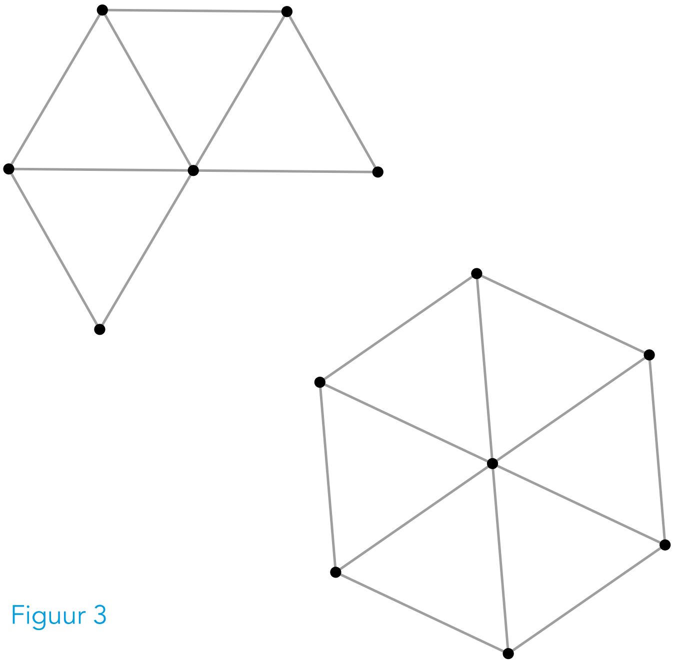
Met 5 punten? Misschien is het leuk die eerst zelf te proberen. De voorbeelden sturen je misschien een beetje in de goede richting.



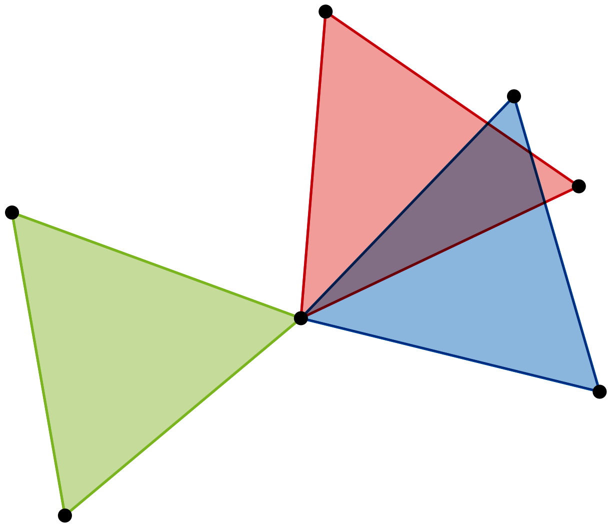
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

Gelukt? Er zijn meerdere oplossingen mogelijk. De eerste configuratie bestaat uit de vijf hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. De tweede bestaat uit de hoekpunten van drie aan elkaar geplakte gelijkzijdige driehoeken.

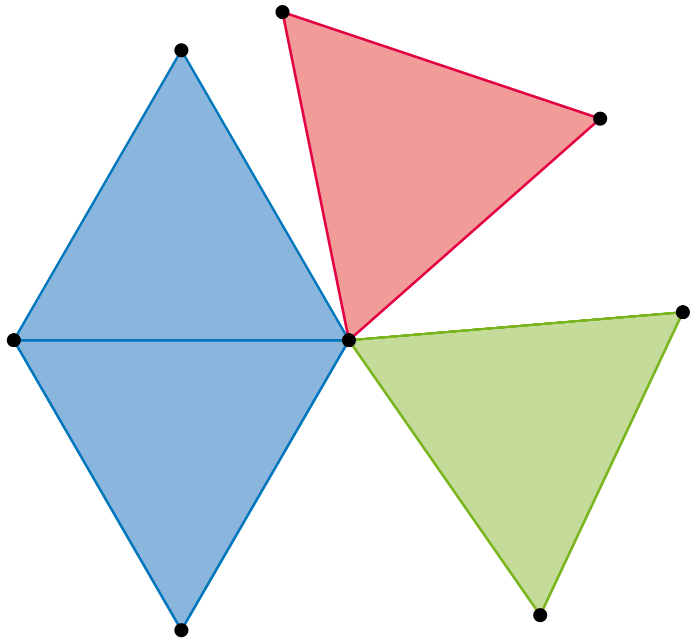
Ook voor 6 en 7 punten vinden we een oplossing met gelijkzijdige driehoeken (zie figuur 3). Als je extra lang doorzoekt, kom je er misschien ook nog achter dat een regelmatige zeshoek niet voldoet, maar een zevenhoek wel.

Voor 8 punten hebben we nu een probleem. We hebben geen ruimte meer om een driehoekje aan te plakken: de cirkel is al vol. Ook een regelmatige achthoek werkt niet; twee buren hebben geen evenwichtspunt. Nu komt de clou van vraag a: we moeten wel gelijkzijdige driehoekjes aan elkaar plakken, maar dat hoeft helemaal niet op deze manier. Als we nu allemaal even grote gelijkzijdige driehoeken aan elkaar plakken, zodat ze allemaal een hoekpunt O gemeen hebben? De driehoeken mogen geen zijden gemeenschappelijk hebben. Als we k driehoeken op deze manier aan elkaar plakken, krijgen we $2k + 1$ punten: we hebben het gemeenschappelijke punt, en daarnaast heeft elk driehoekje nog twee andere punten. Figuur 4 toont een configuratie met drie driehoeken en 7 punten. Waarom zou deze constructie werken? We controleren de 'evenwichtsvoorwaarde'. Stel dat we twee punten hebben, die beide niet het gemeenschappelijke punt O zijn. Dan is O een evenwichtspunt van deze twee punten, want de afstanden tot O zijn de zijden van één gelijkzijdige driehoek, en alle driehoeken zijn even groot. Stel dat we O en een ander punt kiezen. Dan zitten die twee punten in een gelijkzijdige driehoek. Nu is natuurlijk het derde punt in die gelijkzijdige driehoek een evenwichtspunt van deze twee punten. We zijn nu klaar voor oneven n.

Voor even n kunnen we iets vergelijkbaars doen. We zorgen dan dat precies twee van de driehoeken die we aan elkaar plakken, een zijde gemeen hebben. Dan verdwijnt er een punt, want die twee driehoeken dragen (naast O) nu nog maar 3 punten bij, in plaats van 4. Op deze manier kunnen we voor $k \geq 2$ een evenwichtige verzameling van $2k$ punten maken, zoals het plaatje met 8 punten in figuur 5. De reden dat deze configuratie evenwichtig is, is precies dezelfde als die voor oneven n.

VRAAG B In een excentrieke verzameling kunnen we geen cirkel vinden zodat onze verzameling zowel het middelpunt van deze cirkel als drie punten op deze cirkel bevat. Als we terugkijken naar vraag a, dan zien we dat in onze oplossing dat juist wél kon: het gemeenschappelijke punt O is eigenlijk het middelpunt van een cirkel waar alle andere punten op liggen. We moeten dus een nieuwe constructie bedenken, of bewijzen dat het onmogelijk is voor bepaalde n. Dat is lastiger: in plaats van een voorbeeld construeren moeten we dan iets bewijzen over *alle* mogelijke configuraties.

Maar we hadden nóg wat oplossingen gevonden. Voor 3, 5 en 7 punten wisten we al dat een regelmatige veelhoek ook voldeed. Zou dit ook werken voor grotere oneven n? Dit blijkt inderdaad zo te zijn: als je twee punten kiest, dan verdelen we de n-hoek in twee bogen. Op een van deze bogen ligt nu een oneven aantal punten. Als we op die boog het middelste punt kiezen, wat kan omdat er een oneven aantal op ligt, dan is dat punt een evenwichtspunt van de twee gekozen punten. Daarnaast kunnen we natuurlijk nooit een cirkel tekenen rond een van de punten zodat er drie punten op die cirkel liggen: als we al een cirkel hebben die door drie van de punten gaat, dan weten we dat het middelpunt



Figuur 5

precies het centrum van de n-hoek moet zijn, en die zit niet in onze verzameling. Een misschien nog wel snellere controle levert ook op dat de regelmatige veelhoek niet voldoet bij even n: twee buren hebben dan nooit een evenwichtspunt.

Laten we eens proberen om een evenwichtige excentrieke verzameling te maken met 4 punten erin. Stel dat we A en B kiezen, dan kunnen we aannemen dat C het evenwichtspunt van die twee is, dus er geldt $|AC| = |BC|$. Maar als we nu A en D kiezen, dan kan C niet het evenwichtspunt zijn, want dan zou gelden $|DC| = |AC| = |BC|$ en dan is de verzameling niet excentriek. Dus er moet gelden dat B het evenwichtspunt is, want dat is de enige andere mogelijkheid. Dus er geldt $|DB| = |AB|$. Op dezelfde manier kan C niet het evenwichtspunt van B en D zijn, dus is A dat en er geldt dat $|BA| = |DA|$ en dat driehoek ABD gelijkzijdig is. Maar als we nu C en D kiezen, dan moet óf A óf B het evenwichtspunt zijn. In het eerste geval geldt dan $|CA| = |DA| = |BA|$, en in het tweede geval geldt $|BA| = |BD| = |BC|$. In beide gevallen is onze verzameling dus niet excentriek. We kunnen nu concluderen dat er geen evenwichtige excentrieke verzamelingen met 4 punten bestaan.

Wat kunnen we uit het bewijs hierboven halen? We hebben de volgende truc een paar keer gebruikt: als we twee paren punten hebben, die één punt overlappen, dan kunnen die paren niet hetzelfde evenwichtspunt hebben. Dit is omkeerbaar: als twee paren punten wel hetzelfde evenwichtspunt hebben, dan kunnen ze geen punt gemeen hebben.

Dit gegeven over evenwichtige excentrieke verzamelingen gaan we gebruiken door te kijken naar alle mogelijke paren punten. Er zijn $\frac{1}{2}n(n-1)$ mogelijke paren: we hebben n mogelijkheden voor het eerste punt, $n-1$ voor het tweede, maar omdat we alle paren dan dubbel tellen, moeten we $n(n-1)$ nog delen door 2. We kijken nu naar het punt X dat het vaakst een evenwichtspunt van een paar is. Het is duidelijk dat X het evenwichtspunt van minstens $\frac{1}{2}(n-1)$ paren is. Maar n is even, dus $\frac{1}{2}(n-1)$ is geen geheel getal. We mogen nu dit getal naar boven afronden, en we komen erop uit dat X het evenwichtspunt van minstens $\frac{1}{2}n$ paren is. We hadden hierboven gezien dat alle punten in deze paren verschillend moeten zijn. Dus in deze paren zitten minstens n verschillende punten. Maar we hebben in totaal slechts n verschillende punten! Dus X zit zelf ook tussen de n punten. Dit kan natuurlijk niet, want een punt kan nooit een evenwichtspunt zijn van een paar waar dat punt zelf bij in zit. We kunnen nu dus concluderen dat er voor even n geen enkele evenwichtige excentrieke verzameling bestaat.

Hiermee is ook vraag b opgelost. Alleen voor oneven n bestaat er een evenwichtige excentrieke verzameling.

DRIE KEER BRONS Waarom was deze opgave mijn favoriet? Omdat het redeneren aan de hand van plaatjes tekenen gewoon heel leuk is. Nog leuker was, dat achteraf bleek dat Merlijn Staps, een van onze begeleiders, de opgave had bedacht.

Toen ik de opgave voor het eerst zag – op de eerste wedstrijddag dus – kon ik hem bijna helemaal oplossen. Ik miste alleen de regelmatige veelhoeken bij oneven n. Dat was genoeg voor 6 van de 7 punten, maar helaas net niet genoeg voor een eervolle vermelding, die je krijgt als je een opgave helemaal oplost. Desondanks was het voor mij een geslaagde IMO. En ook voor ons land: het Nederlandse team veroverde drie bronzen medailles. ■

JOURNAAL

■ door Alex van den Brandhof en Derk Pik

Profielwerkstukprijs

Ben je bezig met je profielwerkstuk en gaat het over wiskunde? Stuur je werkstuk dan op naar de redactie van *Pythagoras*! Met ingang van dit schooljaar looft het wiskundetijdschrift voor jongeren drie prijzen uit voor de beste wiskundeprofielwerkstukken van het jaar. De prijzen zijn 250, 125 en 75 euro en bij voldoende kwaliteit een artikel in *Pythagoras*.

Vanzelfsprekend moet het onderwerp van je profielwerkstuk wiskundig van aard zijn of een belangrijke wiskundige toepassing bevatten. Je profielwerkstuk ontvangen we graag in pdf; stuur het bestand naar profielwerkstuk@pyth.eu. Je inzending moet voor 15 februari 2016 bij ons binnen zijn.

De profielwerkstukprijs is als volgt georganiseerd. Universitaire wiskundigen uit verschillende vakgebieden selecteren maximaal drie profielwerkstukken. De auteurs van deze profielwerkstukken houden een presentatie van tien minuten op het Nederlands Mathematisch Congres 2016, dat op 22 en 23 maart zal plaatsvinden op het Science Park in Amsterdam.

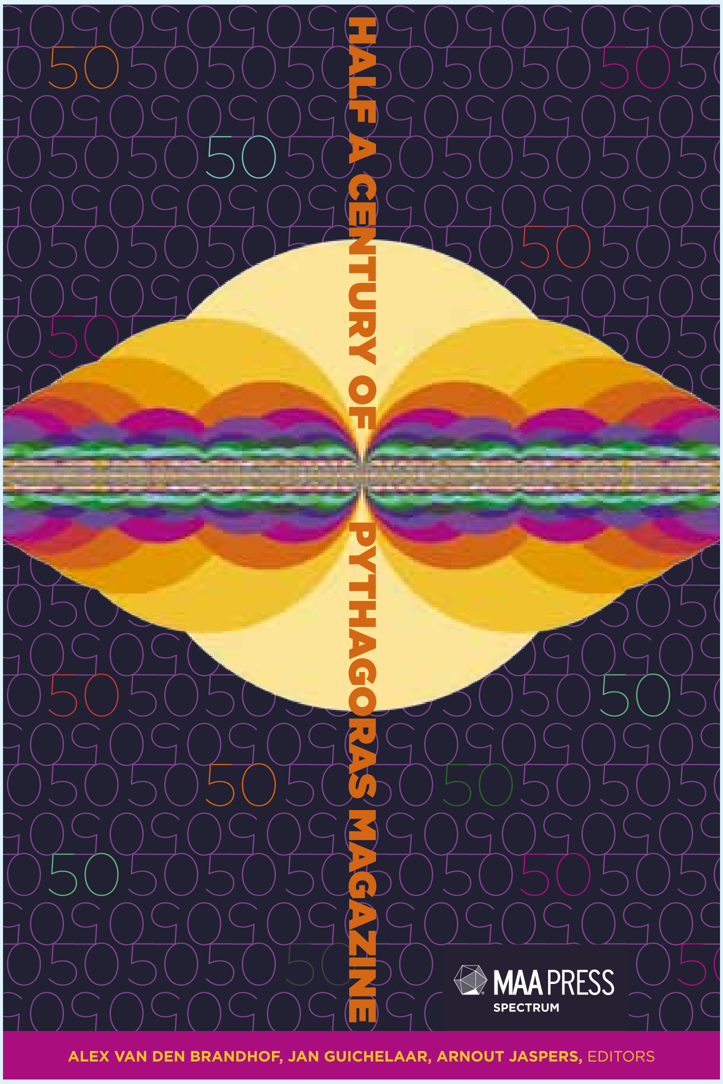
De eerste, tweede en derde prijs worden daar door middel van een stemming onder het publiek bepaald. (DP)

Pythagoras in Amerika

Bij de Mathematical Association of America (MAA) is het boek *Half a Century of Pythagoras Magazine* verschenen: ruim 300 pagina's vol met puzzels en artikelen uit *Pythagoras* uit de jaargangen 1 tot en met 54. In het Engels, uiteraard.

Het boek is niet zomaar een vertaling van *De Pythagoras Code*, het boek dat vier jaar geleden uitkwam ter gelegenheid van vijftig jaar *Pythagoras*. De Engelse editie bevat extra artikelen over getaltheorie en meetkunde uit zowel oudere als recente jaargangen en veel 'Denkertjes' zijn vervangen door andere puzzels uit het rijke oeuvre van *Pythagoras*. Dat maakt het boek ook aantrekkelijk voor het Nederlandstalige publiek dat *De Pythagoras Code* al kent.

De intrigerende afbeelding op het omslag is van Frits Beukers, hoogleraar getaltheorie aan de Universiteit Utrecht. De figuur stond in april 2008 in *Pythagoras*. Het plaatje stelt het interval [0, 1] voor, waarbij elke breuk p/q uit dat interval wordt bedekt met een schijfje met straal $0{,}5/q$. Een wiskundige eigenschap van dergelijke plaatjes is beschreven in het boek. *Half a Century of Pythagoras Magazine* is als gedrukt boek of als e-book te bestellen op de website van de MAA: http://goo.gl/3uMVN0 (dit is een korte versie van http://www.maa.org/press/books/half-a-century-of-pythagoras-magazine).



Discrepantievermoeden opgelost

In onze serie over Paul Erdős schreven we in september 2014 over het discrepantievermoeden. Dit vermoeden gaat over oneindige rijen bestaande uit de getallen +1 en −1. Zo'n rij begint bijvoorbeeld zo: +1, −1, +1, −1, −1, −1, −1, −1, +1, +1, ... Neem nu een willekeurig getal *C*, zo groot als je wilt. Het vermoeden zegt dat er altijd een getal *n* bestaat zodanig dat de absolute waarde van de som van elke *n*-de term van de rij, afgekapt op een zeker moment, groter is dan *C*. In de voorbeeldrij, waarin de eerste tien termen gegeven zijn, kunnen we dat laten zien voor $C = 3$. Sommeer je elke tweede term, afgekapt na de achtste term, dan is de absolute waarde van de uitkomst gelijk aan $|-1 + (-1) + (-1) + (-1)| = |-4| = 4$ en dat is groter dan 3. Hoe de rij ook verder gaat, je kunt altijd een som vinden die groter is dan welk getal ook.

Toen we er vorig jaar een lang artikel aan wijdden, was er net een doorbraak bereikt: het vermoeden was bewezen voor $C = 2$. Maar afgelopen september was er nog veel groter nieuws: Terence Tao heeft het discrepantievermoeden inmiddels bewezen voor élke waarde van *C*. Daarmee heeft hij het volledige probleem van Erdős opgelost. Dit nieuws kwam zelfs op tv: in De Wereld Draait Door vertelden Vincent Icke en Diederik Jekel erover (uitzending van 21 september).

De 40-jarige Terence Tao is hoogleraar aan de University of California, Los Angeles. Hij wordt gerekend tot de allerbeste wiskundigen van de jonge generatie. Hij won meerdere prestigieuze prijzen, zoals de Fieldsmedaille in 2006 en de Breakthrough Prize in Mathematics in 2014. (AvdB)

Een sympathiek initiatief

In de bladenwereld is het eigenlijk *not done* om reclame te maken voor concurrerende tijdschriften, maar voor het Engelse *Chalkdust* maken we graag een uitzondering. *Chalkdust*, van University College London, is een nieuw tijdschrift dat gemaakt wordt door wiskundestudenten. Voor sommige stukken is flink wat voorkennis nodig, maar er is genoeg luchtig materiaal: interviews met topwiskundigen, cartoons, puzzels. Het tijdschrift is alleen digitaal beschikbaar en het kost niets. In maart verscheen de eerste aflevering, vorige maand de tweede. Bekijk het magazine op www.chalkdustmagazine.com. (AvdB)

Grote priemen

Af en toe berichten we in *Pythagoras* dat er weer een priemrecord is. Het grootst bekende priemgetal is alweer bijna drie jaar oud; sinds januari 2013 is $2^{57.885.161} - 1$ recordhouder. Dit is een Mersenne-priemgetal, dat wil zeggen: een priemgetal van de vorm $2^n - 1$. De tien op dit moment grootst bekende priemgetallen zijn allemaal van deze vorm. Dat is geen toeval: van Mersenne-getallen kun je, met behulp van een computer, relatief eenvoudig nagaan of ze priem zijn.

Maar ook naar priemgetallen die niet als $2^n - 1$ te schrijven zijn, wordt gespeurd. Op de elfde plek van grootst bekende priemgetallen staat het getal $19.249 \cdot 2^{13.018.586} + 1$. Dit getal werd in 2007 gevonden. De twaalfde plaats wordt ingenomen door $3 \cdot 2^{11.895.718} - 1$. Dit getal, bestaande uit 3.580.969 cijfers, werd gevonden in juni van dit jaar (ter vergelijking: het grootst bekende priemgetal heeft 17.425.170 cijfers). In de top-100 van grootst bekende priemen staan dertien getallen die dit jaar zijn gevonden. Tot nog toe. Wie weet wat er in de laatste twee maanden nog gebeurt. Een lijst met de 5000 grootst bekende priemen is hier te vinden: http://primes.utm.edu/primes/lists/all.txt. (AvdB)

In het vorige artikel over kwadraten hebben we geanalyseerd welke gehele getallen te schrijven zijn als de som van twee kwadraten. Dat blijkt lang niet altijd te kunnen. Met vier kwadraten gaat het wel! Elk positief, geheel getal kun je schrijven als de som van vier kwadraten. Ja, echt alle getallen. Als je een gigantisch groot getal neemt, één van een miljard cijfers bijvoorbeeld, dan heb je echt geen vijf of meer kwadraten nodig.

■ door Jan Guichelaar

SOM VAN VIER KWADRATEN

Laten we de eerste zeven natuurlijke getallen eens proberen te schrijven als een som van vier kwadraten:

$$\begin{aligned}1 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2;\\ 2 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2;\\ 3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2;\\ 4 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2;\\ 5 &= 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2;\\ 6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2;\\ 7 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.\end{aligned}$$

Je ziet, er zijn nogal wat nullen. Het getal 4 kun je trouwens ook schrijven als som van vier kwadraten zonder nullen: $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Het kleinste getal dat vier kwadraten ongelijk aan 0 nodig heeft, is 7. Het volgende is $15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Probeer zelf maar eens een paar grotere getallen te schrijven als som van vier kwadraten. Het lukt altijd! In dit artikel gaan we de volgende stelling bewijzen:

Elk positief, geheel getal is te schrijven als de som van vier kwadraten.

Deze stelling was al in de oudheid bekend, maar het eerste bewijs werd in 1770 geleverd door de Italiaans-Franse wiskundige Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Het is een heel gedoe om het bewijs van begin tot eind te volgen en te begrijpen. Maar als je het begrepen hebt, dan heb je inzicht in een van de beroemdste stellingen uit de getaltheorie. We rafelen het bewijs in meerdere stappen uiteen. Ga er maar eens goed voor zitten.

VIERKWADRATENIDENTITEIT VAN EULER

Deze stelling zegt dat als je twee getallen hebt die elk de som van vier kwadraten zijn, je het product dan ook kunt schrijven als de som van vier kwadraten. Neem bijvoorbeeld 7 ($= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$) en 31 ($= 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$). Er geldt:

$$\begin{aligned}7 \cdot 31 = {} & (2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2) = \\ & (2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)^2 + \\ & (2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)^2 + \\ & (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2)^2 + \\ & (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5)^2 = \\ & 14^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = \\ & 14^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2.\end{aligned}$$

In het algemeen geldt:

$$\begin{aligned}&(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ &(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + \\ &(x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + \\ &(x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2)^2 + \\ &(x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Door netjes alle haakjes weg te werken, vind je het bewijs zelf eenvoudig, hoewel het wel een beetje schrijfwerk is. Maar daar zien we in dit hele bewijs niet tegenop. Van eigenschap (1) zullen we meerdere keren gebruikmaken.

VAN DE PRIEMGETALLEN MOETEN WE HET HEBBEN

Waarom kunnen we eigenschap (1) nu zo goed gebruiken? Dat is omdat elk getal te schrijven is als een product van priemgetallen, bijvoorbeeld $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, of $91 = 7 \cdot 13$ (dit heet de *priemfactorontbinding*). Dus als je elk priemgetal zou kunnen schrijven als som van vier kwadraten, dan kun je in de priemfactorontbinding van een getal eerst het product van de eerste twee factoren schrijven als som van vier kwadraten. Vervolgens nemen we dat product en de derde factor, en schrijven dus het product van de eerste drie factoren uit de ontbinding als som van vier kwadraten. Enzovoort tot en met het laatste priemgetal in de ontbinding. Deze mooie bewijstruc heet 'volledige inductie'. Daarmee hebben we ons probleem weliswaar nog lang niet opgelost, maar we hoeven het nu 'alleen nog maar' op te lossen voor alle priemgetallen.

Er is slechts één even priemgetal: 2. Dat is te schrijven als $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$. Nu moeten we nog bewijzen dat elk oneven priemgetal te schrijven is als de som van vier kwadraten. Op naar de volgende nuttige gedachte.

PRIEMGETALLEN EN MODULOREKENEN

Als je een getal deelt door een ander getal, houd je meestal een rest over. Bijvoorbeeld $47/7 = 6\frac{5}{7}$, met andere woorden: als je 47 deelt door 7, is de rest gelijk aan 5. Als twee getallen a en b bij deling door een getal k dezelfde rest hebben, zeggen we: a is congruent met b, modulo k. In formulevorm:

$$a \equiv b \pmod{k}.$$

Neem een oneven priemgetal p en neem de verzameling $G_p = \{0, 1, 2, 3, ..., \frac{1}{2}(p - 1)\}$. Deze verzameling heeft $\frac{1}{2}(p + 1)$ elementen. Het aantal elementen van, bijvoorbeeld, $G_{17} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ is gelijk aan 9.

Neem nu van alle elementen uit G_p de *kwadraten*, dat geeft de verzameling $T_p = \{0, 1, 4, 9, 16, ..., \frac{1}{4}(p - 1)^2\}$. In ons voorbeeld: $T_{17} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$.

Deel nu deze getallen allemaal door p en bekijk de *resten*, dat geeft de verzameling R_p. In ons voorbeeld: $R_{17} = \{0, 1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13\}$.

Wat opvalt, is dat ze allemaal verschillend zijn. Geldt dat voor elke p? Ja, en dat bewijzen we uit het ongerijmde, weer zo'n mooie bewijstruc. We veronderstellen dat er wél twee resten gelijk zijn, en leiden daaruit een tegenspraak af. Daaruit volgt dan dat de resten allemaal verschillend moeten zijn. Stel dus dat voor twee verschillende getallen a en b (met $a < b$) uit G_p hun kwadraten gedeeld door p wél dezelfde rest hebben:

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{p}.$$

Dan geldt:

$$b^2 - a^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ofwel

$$(b + a)(b - a) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dus $b^2 - a^2$ is deelbaar door priemgetal p en p moet een deler zijn van $b + a$ óf van $b - a$. Omdat $b + a < p$ en $b - a < p$, volgt dat priemgetal p geen deler kan zijn van $b + a$ en ook niet van $b - a$. We stuiten hier op een tegenspraak, waaruit dus volgt dat alle resten uit de verzameling R_p verschillend zijn. Zo, weer een stapje verder.

NOG EEN KEER, MET IETS ANDERE KWADRATEN

Van G_p nemen we nu niet alle kwadraten, maar alle getallen $-1 - x^2$ (waarbij x een element is van G_p). Zo krijgen we de verzameling $T_p{}^* = \{-1, -2, -5, -10, ..., -1 - \frac{1}{4}(p - 1)^2\}$. Voor ons voorbeeld $p = 17$ geldt: $T_{17}{}^* = \{-1, -2, -5, -10, -17, -26, -37, -50, -65\}$. Voor de resten na deling door 17 krijgen we de verzameling $R_{17}{}^* = \{16, 15, 12, 7, 0, 8, 14, 1, 3\}$.

Opnieuw zien we dat alle resten verschillend zijn. Dat zal ook wel weer algemeen gelden, dus voor elke $R_p{}^*$. Stel maar eens dat er twee waarden a en b van G_p zijn waarvoor geldt dat $-1 - a^2$ en $-1 - b^2$ dezelfde rest hebben na deling door p:

$$-1 - a^2 \equiv -1 - b^2 \pmod{p}.$$

Dan geldt:

$$b^2 - a^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ofwel

$$(b + a)(b - a) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dus $b^2 - a^2$ is deelbaar door priemgetal p en p moet dus een deler zijn van $b + a$ of van $b - a$. Omdat $b + a < p$ en $b - a < p$, volgt dat priemgetal p geen deler kan zijn van $b + a$ en ook niet van $b - a$, een tegenspraak. Dus zijn alle resten in $R_p{}^*$ verschillend. En nu met deze gegevens naar de volgende stap.

DE EERSTE GROTE STAP NAAR VIER KWADRATEN

We hebben nu twee verzamelingen, R_p en $R_p{}^*$, met in elke verzameling allemaal verschillende resten. Hoeveel elementen zitten er in die verzamelingen? In elke verzameling zitten er $\frac{1}{2}(p + 1)$. In totaal dus $p + 1$.

Hoeveel verschillende resten zijn er nu eigenlijk mogelijk na deling door p? Dat zijn er precies p: $0, 1, 2, 3, ..., p - 1$. Maar we hebben $p + 1$ resten.

Dus er zitten minstens twee resten in de gecombineerde verzamelingen die gelijk zijn aan elkaar. (Dit is een toepassing van het zogenaamde ‘ladeprincipe’. Probeer eens 11 truien in een kast met 10 laden te doen. Dan is er zeker één lade met minstens twee truien.) Neem die twee gelijke resten. Kunnen die beide in R_p zitten? Nee, want die zijn allemaal verschillend. Dan ook niet beide in R_p^*. Dus een van de twee is een rest uit R_p en de andere een uit R_p^*. Je ziet dat de twee verzamelingen R_p en R_p^* nodig waren om het aantal elementen op te tillen naar $p + 1$ om het ladeprincipe toe te kunnen passen.

We hebben nu dus twee waarden a^2 (uit T_p, $a < \frac{1}{2}p$) en $-1 - b^2$ (uit T_p^*, $b < \frac{1}{2}p$) die na deling door p dezelfde rest hebben. Dus:

$$a^2 \equiv -1 - b^2 \pmod{p}.$$

Dan kunnen we schrijven:

$$a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die 0^2 hebben we er maar bijgezet om een som van vier kwadraten te krijgen. Het linkerlid is dus deelbaar door p en moet dus een veelvoud zijn van p (zeg $k \cdot p$):

$$a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 = kp.$$

Wat we nu dus kunnen concluderen, is dat we voor de vergelijking

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = kp \qquad (2)$$

een oplossing gevonden hebben, met voor $i = 1, 2, 3, 4$:

$$x_i < \tfrac{1}{2}p.$$

Het linkerlid van (2) is dus kleiner dan $4 \cdot (\frac{1}{2}p)^2 = p^2$. Het rechterlid dus ook, waaruit volgt dat

$$k < p.$$

Nou, nou, even tijd voor een cola. We hebben dan nog wel niet bewezen dat elk oneven priemgetal p te schrijven is als som van vier kwadraten, maar een zeker veelvoud van p, namelijk kp, is dat wel. Nu nog maar eens zien of we die k, die al kleiner is dan p, nog kleiner kunnen maken, ja gelijk aan 1 kunnen maken. Dan zijn we er eindelijk.

EEN NIEUWE *K* Elk getal is te schrijven als het product van priemgetallen, dus ook k. Stel dat k een factor 2 bevat. Dan is het rechterlid van (2) even, dus ook het linkerlid. Dan zijn er drie mogelijkheden:

- alle vier x_i zijn even;
- alle vier zijn oneven;
- twee zijn er oneven en twee even.

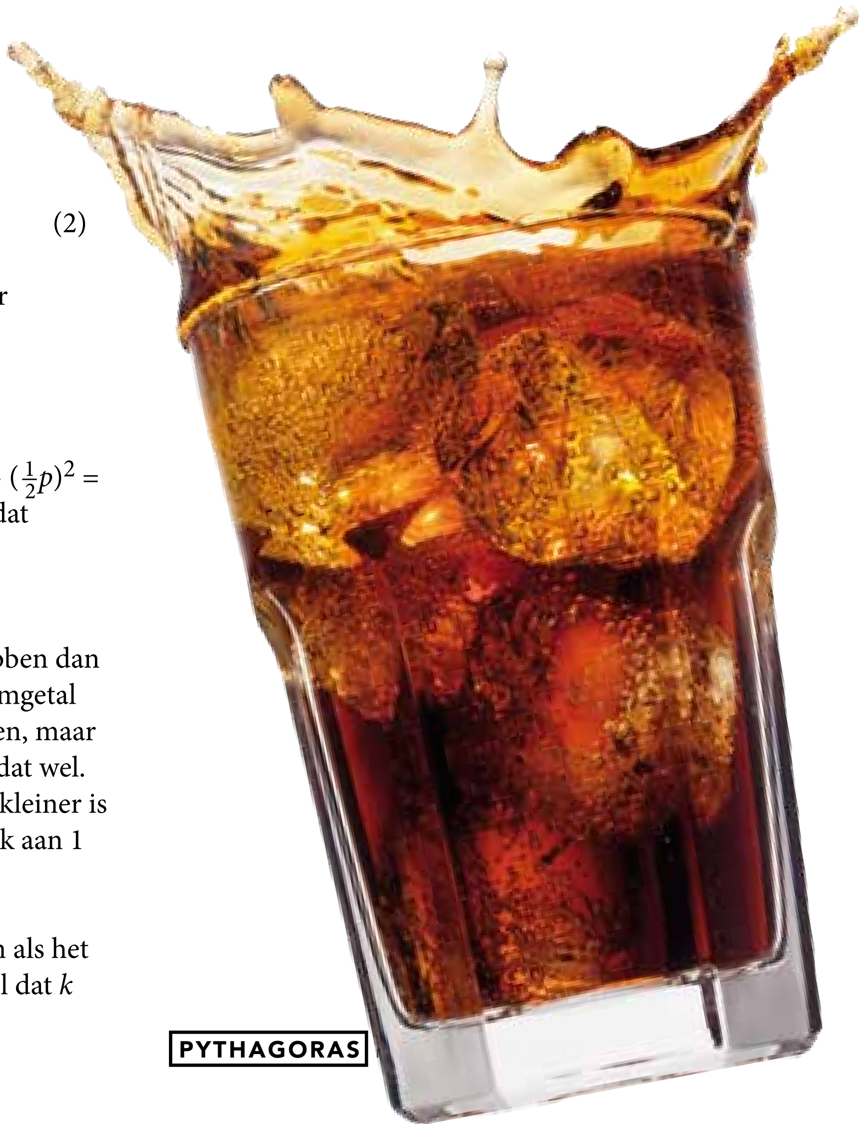
In het derde geval kunnen we natuurlijk de eerste twee x_i even nemen en de laatste twee oneven. Desnoods moeten we indices veranderen, maar de volgorde van de x_i doet er natuurlijk niet toe. Definieer nu vier nieuwe gehele getallen x_i':

$$x_1' = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2),$$
$$x_2' = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2),$$
$$x_3' = \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4),$$
$$x_4' = \tfrac{1}{2}(x_3 - x_4).$$

Deze vier getallen kwadrateren we en tellen we op. Een beetje rekenen geeft (de kruistermen vallen weg):

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2 = \tfrac{1}{2}kp.$$

Kijk aan, we hebben een nieuwe k: $k' = \frac{1}{2}k$. Steeds als we in het proces van kleiner wordende k's een even k tegenkomen, kunnen we er dus een factor 2 uitdelen.



TUSSENSTAP Nu richten we ons op oneven waarden van k. We moeten dan nog een niet onbelangrijke kleinigheid uitleggen. Neem eens voor het gemak een getal $x = 27$ en oneven $k = 7$. Dan geeft x na deling door $k = 7$ rest -1. Let op de bewust gekozen negatieve rest. Maar ook $27 - 7 = 20$ geeft na deling door 7 rest -1, en zo ook $20 - 7 = 13$, en 6, en -1. Dan is -1 het kleinste getal *in absolute waarde* met $27 \equiv -1 \pmod 7$. Startend bij 28 krijg je zo 0, startend bij 31 krijg je 3 en startend bij 25 kom je bij -3. Uiteindelijk zijn er natuurlijk maar 7 resten mogelijk: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ en 3. Voor al deze resten geldt dat de absolute waarden kleiner zijn dan $\frac{1}{2} \cdot 7$. Voor een oneven k geldt dan dat alle absoluut minimale resten kleiner zijn dan $\frac{1}{2}k$. We zullen dat in de volgende paragraaf nodig hebben.

BIJNA DE LAATSTE STAP Ga nu verder met de oneven k. Neem de bij de vier x_i horende minimale waarden y_i, verkregen op de wijze in de vorige paragraaf. Als de rest van x_i bij deling door k gelijk is aan r_i, dan is dat ook zo voor de rest horend bij y_i. Ze zijn congruent modulo k. Maar dan geldt ook dat elke x_i^2 en de bijbehorende y_i^2 beide rest r_i^2 hebben na deling door k. Want:

$$x_i^2 = (m_ik + r_i)^2 = k(m_i^2k + 2m_ir_i) + r_i^2.$$

Dus de som van de vier kwadraten van x_i en die van y_i zijn congruent modulo k:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \pmod k.$$

Het rechterlid is deelbaar door k volgens vergelijking (2). Dus ook het linkerlid:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = k'k. \qquad (3)$$

Hoe groot is k' nu? Uit de tussenstap volgde $y_i < \frac{1}{2}k$, waaruit volgt:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < 4(\tfrac{1}{2}k)^2 = k^2.$$

Hier zie je dus de noodzaak om gebruik te maken van de minimale waarden y_i. Dan krijgen we

$$k' < k.$$

DE LAATSTE STAP Nu gaan we Eulers gelijkheid (1) op een bijzondere manier gebruiken. We vullen de gevonden x_i en y_i in het rechterlid in. Dan krijgen we vier getallen z_i, waarvan het rechterlid de som van de kwadraten is. In het linkerlid staat het product van de sommen van de kwadraten van de x_i en de y_i. Dan hebben we met (2) en (3):

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = k^2k'p. \qquad (4)$$

Nu moeten we de nieuwe waarden z_i eens goed bekijken. Eerst z_1:

$$z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \pmod k.$$

En omdat $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ een veelvoud is van k (zie (2)), is z_1 dat dus ook:

$$z_1 \equiv 0 \pmod k.$$

Bekijk nu z_2:

$$z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3.$$

Even precies kijken: x_1 en y_1 hebben dezelfde rest en ook x_2 en y_2. Dan hebben de eerste twee termen bij delen door k dezelfde rest, namelijk r_1r_2. Het verschil van de eerste twee termen is dus deelbaar door k. Hetzelfde geldt voor het verschil van de derde en vierde term. Dus er geldt ook

$$z_2 \equiv 0 \pmod k.$$

Op dezelfde wijze vinden we

$$z_3 \equiv 0 \pmod k \quad \text{en} \quad z_4 \equiv 0 \pmod k.$$

Dus z_i/k is een geheel getal voor $i = 1, 2, 3, 4$. Vergelijking (4) geeft dan

$$\left(\frac{z_1}{k}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{k}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{k}\right)^2 + \left(\frac{z_4}{k}\right)^2 = k'p.$$

Kortom, we hebben nu in het linkerlid een som van vier gehele kwadraten. Deze zijn samen gelijk aan $k'p$, met $k' < k$. We zijn er dus weer in geslaagd het rechterlid kleiner te maken. Als de nieuwe k' nog niet 1 is, doen we het proces (voor een even of een oneven k') gewoon nog een keer, en dan nog eens en nog eens, indien nodig. Tot $k' = 1$.

EINDELIJK Met de inductie in omgekeerde volgorde hebben we nu dus bewezen dat elk oneven priemgetal p te schrijven is als de som van vier kwadraten. En met de gelijkheid van Euler hebben we het dan ook aangetoond voor alle natuurlijke getallen. Dat was de moeite waard!

Wie verder in deze materie wil duiken, kan veel vinden in *A Course in Number Theory* van H.E. Rose (Clarendon Press, Oxford, 1988). Ons bewijs is ook ontleend aan de inhoud van dit boek. ■

PYTHAGORAS OLYMPIADE

■ door Matthijs Coster, Eddie Nijholt en Harry Smit

Doe mee met de Pythagoras Olympiade! Elke aflevering bevat vier opgaven. De eerste twee zijn wat eenvoudiger; onder de goede inzendingen van leerlingen uit de klassen 1, 2 en 3 wordt een cadeaubon van Bol.com ter waarde van 20 euro verloot. De laatste twee zijn echte breinbrekers; onder de goede inzendingen van leerlingen (tot en met klas 6) wordt een bon van 20 euro verloot. Per aflevering wordt maximaal één bon per persoon vergeven.
Daarnaast krijgen leerlingen (tot en met klas 6) punten voor een *laddercompetitie*, waarmee eveneens een cadeaubon van Bol.com van 20 euro te verdienen valt. De opgaven van de onderbouw zijn 1 punt waard, de opgaven van de bovenbouw 2 punten. De leerling met de hoogste score in de laddercompetitie krijgt een bon. Zijn puntentotaal wordt weer op 0 gezet. Wie zes achtereenvolgende keren niets inzendt, verliest zijn punten in de laddercompetitie.
Met de bovenbouwopgaven kun je ook een plaats in de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade verdienen, mocht het via de voorronden niet lukken: aan het eind van elke jaargang worden enkele goed scorende leerlingen uitgenodigd voor de NWO-finale. Niet-leerlingen kunnen met de Pythagoras Olympiade meedoen voor de eer.

HOE IN TE ZENDEN? Inzenden kan alleen per e-mail. Stuur je oplossing (getypt of een scan of foto van een handgeschreven oplossing) naar pytholym@gmail.com. Je ontvangt een automatisch antwoord zodra we je bericht hebben ontvangen.
Voorzie het antwoord van een duidelijke toelichting (dat wil zeggen: een berekening of een bewijs). Vermeld je naam en adres; leerlingen moeten ook hun klas en de naam van hun school vermelden.
Je inzending moet bij ons binnen zijn vóór 31 december 2015.

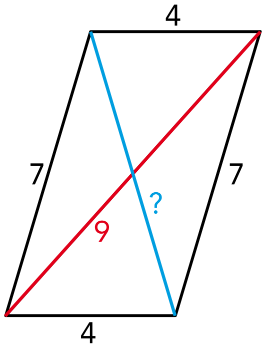
DE GOEDE INZENDERS VAN JUNI 2015

310: Jelmer Firet (klas 3), RSG de Borgen (Lindenborg), Leek; Rinze Hallema (klas 1), Stedelijk Gymnasium, Leeuwarden; Leon van Mierlo (klas 5), Minkema College, Woerden; Niels van Mierlo (klas 4), Christelijk Gymnasium, Utrecht; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.
311: Rainier van Es (klas 5), Zwijsen College, Veghel; Jelmer Firet (klas 3), RSG de Borgen (Lindenborg), Leek; Arie Heikoop, Kampen; Pascal Kwanten, Almere; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Robert van der Waall, Huizen.
312: Rainier van Es (klas 5), Zwijsen College, Veghel; Jelmer Firet (klas 3), RSG de Borgen (Lindenborg), Leek; Arie Heikoop, Kampen; Arie van der Kraan, Nuth; Pascal Kwanten, Almere; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Robert van der Waall, Huizen.
313: Anton van Es (klas 5), Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; Jelmer Firet (klas 3), RSG de Borgen (Lindenborg), Leek; Arie Heikoop, Kampen; Levi van de Pol (klas 2), Ichthus College, Veenendaal; Pim Spelier (klas 6), Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag.
Cadeaubonnen: Rinze Hallema en Rainier van Es.

Stand laddercompetitie: Pim Spelier (23 p; cadeaubon), Wouter Zijlstra (15 p), Frenk Out (14 p), Wout Gevaert (12 p), Niels van Mierlo (12 p), Sander Engelberts (11 p), Oscar Heijdra (11 p), Marinda Westerveld (11 p), Tara van Belkom (10 p), Reinier Schmiermann (9 p), Beaudine Smeekes (9 p), Eline Welling (9 p), Rainier van Es (7 p), Sebastiaan Ceuppens (6 p), Jelmer Firet (6 p), Tjard Langhout (6 p), Levi van de Pol (6 p), Simon Roelandt (6 p), Michiel Versnel (6 p), Max Bosman (5 p), Ivo van Dijck (5 p), Anton van Es (5 p), Merlijn Hunik (5 p), Stef Rasing (5 p), Laurens Hilbrands (4 p), Antonie Moes (4 p), Jelle Couperus (2 p), Sietse Couperus (2 p), Maud van de Graaf (2 p), Phillip de Groot (2 p), Rinze Hallema (2 p), Matthijs Pool (2 p), Sied Vrasdonk (2 p), Marc Zuurbier (2 p), Stijn van Bemmel (1 p), Simon de Best (1 p), Ludivine Bonvarlez (1 p), Johanna Bult (1 p), Maarten Clercx (1 p), Kenny van Dijken (1 p), Famke Driessen (1 p), Tessa Engelberts (1 p), Tim Groot (1 p), Calista Hainaut (1 p), Gerben-Jan Hooijer (1 p), Boris Kloeg (1 p), Elisabeth Kuijper (1 p), Nora Lahlou (1 p), Bram van der Linden (1 p), Daphné Meyer-Horn (1 p), Lotte Middelberg (1 p), Leon van Mierlo (1 p), Hannah Nijsse (1 p), Alwin van der Paardt (1 p), Bram Pel (1 p), Youri Pouw (1 p), Olivier Segers (1 p), Jan Willem de Waard (1 p), Senne Willems (1 p).

OPGAVE 318

De zijden van het parallellogram hiernaast hebben lengte 4 en 7, en een van de diagonalen heeft een lengte van 9. Bereken de lengte van de andere diagonaal.



OPGAVE 319

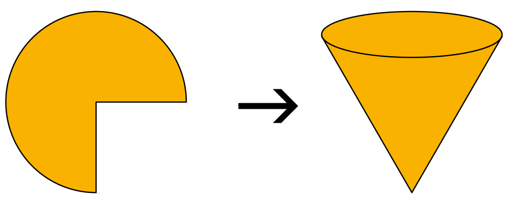
Wat is de langste rij getallen die je kunt construeren zó, dat
- de som van elke 2015 opeenvolgende getallen gelijk is aan –1,
- de som van elke 2016 opeenvolgende getallen gelijk is aan +1?

OPGAVE 320

Je bent jarig en voor je staan evenveel kaarsen als dat je oud bent geworden (zeg n). Je blaast een aantal kaarsen uit. Daarbij blaas je zó willekeurig, dat de kans dat je 1, 2, 3, ..., n kaarsen uitblaast even groot is. Daarna zul je (hoogstwaarschijnlijk) opnieuw moeten blazen (zeg k kaarsen). Voor elk aantal kaarsen is de kans dat je dat aantal uitblaast gelijk aan $\frac{1}{k}$. Daarna zul je mogelijk nog een aantal keren moeten blazen totdat alle kaarsen zijn gedoofd. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal keren dat je zult moeten blazen?

OPGAVE 321

Uit een rond velletje papier wordt een taartpunt met een hoek van 90° geknipt. Vervolgens wordt het overgebleven papiertje tot een hoorntje gevouwen. Wat wordt de hoek in de punt van dit hoorntje? (Onder *de* hoek wordt verstaan: de hoek die het hoorntje maakt bij doorsnijding met het (verticale) vlak waarin de symmetrie-as van het hoorntje ligt.)



OPLOSSING 310

Anton, Bert en Carel nemen het tegen elkaar op in een aantal tests. Als je de beste bent in zo'n test, dan krijg je x punten, de tweede krijgt y punten, en de laatste krijgt z punten. De getallen x, y en z zijn geheel en $x > y > z$. Anton eindigde met 20 punten, Bert met 10, en Carel met 9. In geen enkele test werden er gelijke scores behaald. In de algebratest was Anton de op één na beste. Wie was er de op één na beste in de meetkundetest?

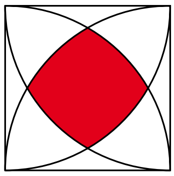
Oplossing. Noem het aantal tests n. Dit zijn er minstens 2. Per test worden $x + y + z \geq 3 + 2 + 1 = 6$ punten verdiend. Anton, Bert en Carel hebben samen $20 + 10 + 9 = 39$ punten gehaald, dus $n(x + y + z) = 39$. Omdat $n \geq 2$ en $x + y + z \geq 6$, blijft als enige mogelijkheid $n = 3$ en $x + y + z = 13$ over (immers, de enige delers van 39 zijn 1, 3, 13 en 39).

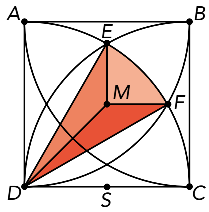
Er geldt dat $13 = x + y + z > 2y + 1$, dus $y \leq 5$. Dan moet Anton minstens één keer eerste zijn geworden, omdat zijn score anders maximaal $3y = 15$ punten zou zijn, terwijl hij 20 heeft gehaald. Anton is dus een keer eerste en een keer tweede geworden, dit levert hem al $x + y$ punten op. Bij de derde en laatste test kan hij niet derde zijn geworden, aangezien hij dan $x + y + z = 13$ punten zou hebben gehaald. Ook kan hij niet tweede zijn geworden, want dan had hij maximaal $x + 2y < x + 2y + z = (x + y + z) + y \leq 13 + 5 = 18$ punten gehaald. Hij is dus twee keer eerste en één keer tweede (bij de algebratest) en we weten daarmee dat $2x + y = 20$. Maar dan geldt $7 = 20 - 13 = (2x + y) - (x + y + z) = x - z$ en dus $13 = x + y + z = (7 + z) + y + z = 7 + y + 2z$, waaruit volgt dat $3z < y + 2z = 6$, dus $z < 2$ en daarmee $z = 1$. Dan volgt $x = 7 + z = 8$ en $y = 13 - x - z = 4$.

Stel dat Carel een test won. Dan had hij minstens $8 + 1 + 1 = 10$ punten gehaald, dus dit is geen optie. In de algebratest is dus Bert eerste, Anton tweede en Carel derde. Aangezien Bert heeft gewonnen, is zijn score voor de andere twee tests samen nog maar $10 - 8 = 2$; hij werd dus derde bij elk van deze tests, in het bijzonder bij de meetkundetest. We concluderen dat Anton de meetkundetest heeft gewonnen en Bert werd derde, dus Carel is tweede geworden.

OPLOSSING 311

Hieronder (links) is een vierkant getekend met vier kwarten van cirkels, met middelpunten in de hoekpunten. De lengte van de zijde is 6. Bepaal de oppervlakte van het rode gebied.



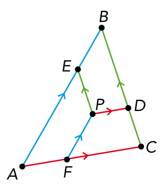


Oplossing. Punt M is het midden van het vierkant. Er geldt $DE = CD = CE = 6$ aangezien het alledrie stralen van een cirkel zijn, dus driehoek CDE is gelijkzijdig, dus $\angle CDE = 60°$. Verder is DM de bissectrice van $\angle ADC$, dus $\angle ADM = 45°$. Hieruit volgt dat $\angle EDM = 15°$. Analoog geldt dat $\angle FDM = 15°$. Dus $\angle EDF = 30°$. Dit betekent dat het gebied ingesloten door DE, DF en de cirkelboog tussen E en F oppervlakte $30/360 \cdot \pi \cdot 6^2 = 3\pi$ heeft. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat $ES = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Dus $EM = ES - MS = 3\sqrt{3} - 3$. Analoog $FM = 3\sqrt{3} - 3$. Nu weten we dat opp$(\Delta EDM) = \frac{1}{2}DS \cdot ME = (9\sqrt{3} - 9)/2$ en opp$(\Delta FDM) = \frac{1}{2}MS \cdot FM = (9\sqrt{3} - 9)/2$. Dus de oppervlakte van het gebied ingesloten door EM, FM en de cirkelboog EF is gelijk aan $3\pi - (9\sqrt{3} - 9)/2 - (9\sqrt{3} - 9)/2 = 3\pi - 9\sqrt{3} + 9$. Dit is precies een kwart van het gevraagde gebied; de totale gevraagde oppervlakte is dus $12\pi - 36\sqrt{3} + 36$.

OPLOSSING 312

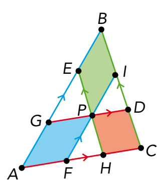
Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC en een punt P hierbinnen. We trekken een lijn door P evenwijdig met BC. Het snijpunt van deze lijn met AB noemen we E. Evenzo trekken we een lijn door P evenwijdig met AC; diens snijpunt met BC is D. Ten slotte trekken we een lijn door P evenwijdig met AB; diens snijpunt met AC is F. Laat zien dat geldt

$$\frac{BE}{AB} + \frac{CD}{BC} + \frac{AF}{AC} = 1.$$



Oplossing. Trek de lijnstukken DP, EP en FP door tot respectievelijk G, H en I. We laten zien dat (1) $CD/BC = AG/AB$, en (2) $AF/AC = GE/AB$. Aangezien $AB = AG + GE + EB$, volgt dan:

$$\frac{BE}{AB} + \frac{CD}{BC} + \frac{AF}{AC} = \frac{BE}{AB} + \frac{AG}{AB} + \frac{GE}{AB} = \frac{BE + AG + GE}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$



(1) Wegens F-hoeken geldt $\angle BDG = \angle BCA$ en $\angle BGD = \angle BAC$, dus $\Delta GBD \sim \Delta ABC$ (hh). Er geldt dan dat $BD/BC = BG/AB$. Dus voor de complementaire lijnstukken op respectievelijk BC en AB geldt dat $CD/BC = AG/AB$. (2) Wederom wegens F-hoeken geldt $\angle CFI = \angle CAB$ en $\angle CIF = \angle CBA$, dus $\Delta CFI \sim \Delta CAB$ (hh). Dit geeft $FC/AC = FI/AB$. Omdat $AGPF$ en $EBIP$ parallellogrammen zijn, geldt $FP = AG$ en $PI = EB$ en dus $FI = AG + EB$. We vinden nu $FI/AB = (AG + EB)/AB$. Dus voor de complementaire lijnstukken op respectievelijk AC en AB geldt dat $AF/AC = GE/AB$.

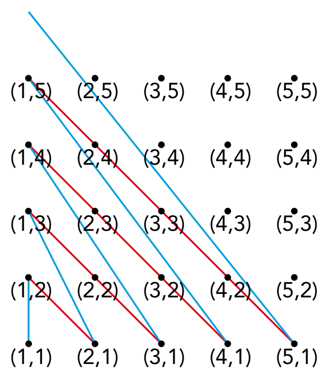
OPLOSSING 313

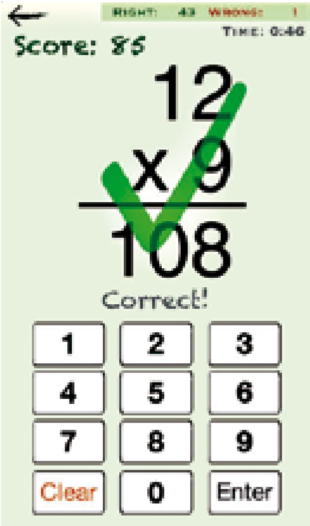
Zoals je weet, zijn de natuurlijke getallen alle positieve, gehele getallen: 1, 2, 3, 4, 5, ... Geef een oneindige rij natuurlijke getallen die aan de volgende eisen voldoet: de rij bevat een 1, maar ook twee keer een 1 achter elkaar, en ook drie keer een 1 achter elkaar, enzovoort. (Let op: met 'drie keer een 1 achter elkaar' bedoelen we niet '111', maar '1, 1, 1'.) Verder bevat de rij een 2, twee keer een 2 achter elkaar, drie keer een 2 achter elkaar, enzovoort. Evenzo voor 3, 4, 5, en zo verder voor elk natuurlijk getal.

Oplossing. Er zijn oneindig veel verschillende rijen mogelijk. Ter visualisatie bekijken we het probleem vanuit een iets andere hoek; associeer aan k opeenvolgende getallen n het punt (k, n). Een rij geven met de gestelde eisen is nu hetzelfde als alle punten (k, n), met $k \geq 1$ en $n \geq 1$, in een of andere volgorde langslopen, met als voorwaarde dat we niet (k_1, n) en (k_2, n) achter elkaar bezoeken, aangezien dit zal leiden tot $k_1 + k_2$ opeenvolgende n'en.

Een mogelijkheid is nu als volgt: we beginnen met (1, 1), vervolgens gaan we naar (1, 2) en (2, 1), daarna (1, 3), (2, 2) en (3, 1), dan (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), enzovoort (zie illustratie). Als rij getallen ziet deze wandeling langs al die punten er als volgt uit:

$$\underbrace{1}_{(1,1)},\ \underbrace{2}_{(1,2)},\ \underbrace{1,1}_{(2,1)},\ \underbrace{3}_{(1,3)},\ \underbrace{2,2}_{(2,2)},\underbrace{1,1,1}_{(3,1)}, \ldots$$





APP VAN DE MAAND: *MENTAL MATH CARDS*

Maak indruk op je vrienden met bliksemsnelle mentale wiskundige vaardigheden. De gratis app *Mental Math Cards*, beschikbaar voor de iPhone en de iPad, biedt stap-voor-stap-instructies om berekeningen waarbij je moet optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen snel te doen. Leuk en leerzaam!

PYTHAGORAS

55ste jaargang nummer 2
november 2015
ISSN 0033 4766

***Pythagoras* stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. *Pythagoras* richt zich tot leerlingen van vwo en havo en alle anderen die jong van geest zijn.**

Internet www.pyth.eu

Hoofdredacteur Derk Pik

Eindredacteur Alex van den Brandhof

Redactie Matthijs Coster, Jeanine Daems, Jan Guichelaar, Klaas Pieter Hart, Paul Levrie, Marc Seijlhouwer

Vormgeving Grafisch Team Digipage, Leidschendam

Druk Drukkerij Ten Brink, Meppel

Uitgever Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG)

Management Pythagoras
Mark Veraar (KWG), Derk Pik

Lezersreacties en kopij
Bij voorkeur per e-mail; lezersreacties naar Jan Guichelaar, jan@pyth.eu en kopij naar Derk Pik, derk@pyth.eu.
Eventueel per post naar Pythagoras, p.a. Centrum Wiskunde & Informatica, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Abonnementen, bestellingen en mutaties
Abonneeservice Pythagoras
Postbus 2238
5600 CE Eindhoven
Telefoon: 085 016 02 51
E-mail: abonnementen@pyth.eu

Abonnementsprijs
(zes nummers per jaargang)
€ 35,00 (Nederland en België),
€ 37,00 (overige landen),
€ 20,00 (groepsabonnement NL/B),
€ 35,00 (geschenkabonnement NL/B),
€ 37,00 (geschenkabonnement overige landen).
Een geschenkabonnement stopt automatisch na één jaar. Overige abonnementen gelden tot wederopzegging. Zie www.pyth.eu voor verdere toelichtingen.

Aan dit nummer werkten mee
Alex van den Brandhof (alex@pyth.eu),
Dirk van Bree (dirk.van.bree@home.nl),
Matthijs Coster (matthijs@pyth.eu),
Jeanine Daems (jeanine@pyth.eu),
Jan Guichelaar (jan@pyth.eu),
Klaas Pieter Hart (kp@pyth.eu),
Arnout Jaspers (arnoutjaspers@gmail.com),
Paul Levrie (paul@pyth.eu),
Eddie Nijholt (eddie@pyth.eu),
Derk Pik (derk@pyth.eu),
Harry Smit (h.j.smit@students.uu.nl),
William Verspaandonk (william_verspaandonk@hotmail.com).

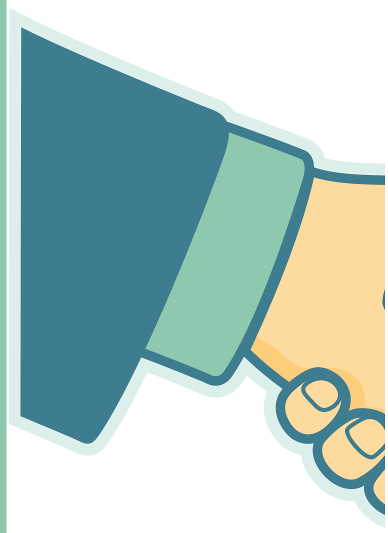
Pythagoras wordt mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de onderstaande instituten en instellingen.

TU Delft TU/e UNIVERSITEIT TWENTE. CWI EURANDOM

OEIS A005132

0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20,

12, 21, 11, 22, 10, ...



Zie je hoe deze rij verder gaat? Dat zou erg knap zijn, want enige regelmaat kun je er eigenlijk niet in ontdekken. Toch is het recept om het volgende getal te vinden simpel. Op pagina 19 lees je meer over deze rij, die ooit werd bedacht door de Colombiaan Bernardo Recamán Santos.