УДК 004.42:510.69

ЧИСТІ ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк

Досліджено чисті першопорядкові логіки часткових і тотальних, однозначних і неоднозначних квазіарних предикатів. Описано семантичні моделі та мови таких логік, особливу увагу приділено вивченню композиційних предикатних алгебр та класів інтерпретацій (семантик), відношень логічного наслідку для множин формул. Для таких відношень побудовано низку числень секвенцій ного типу, характерною особливістю цих числень є розширені умови замкненості секвенції та оригінальні форми елімінації кванторів.

Ключові слова: логіка, предикат, семантика, логічний наслідок, секвенційне числення.

Исследованы чистые первопорядковые логики частичных и тотальных, однозначных и неоднозначных квазиарных предикатов. Описаны семантические модели и языки таких логик, особое внимание уделено изучению композиционных предикатных алгебр и классов интерпретаций (семантик), отношений логического следствия для множеств формул. Для таких отношений построен ряд исчислений секвенциального типа, характерными особенностями этих исчислений являются расширенные условия замкнутости секвенции и оригинальные формы элиминации кванторов.

Ключевые слова: логика, предикат, семантика, логическое следствие, секвенциальное исчисление.

Pure first-order logics of partial and total, single-valued and multi-valued quasiary predicates are investigated. For these logics we describe semantic models and languages, giving special attention in our research to composition algebras of predicates and interpretation classes (sematics), and logical consequence relations for sets of formulas. For the defined relations a number of sequent type calculi is constructed; their characteristic features are extended conditions for sequent closure and original forms for quantifier elimination.

Key words: logic, predicate, semantics, logical consequence, sequent calculus.

Вступ

Розширення сфери застосування інформаційних технологій виводить на перший план задачу створення надійних і ефективних програмних систем. Успішне вирішення цієї задачі неможливе без широкого використання понять і методів математичної логіки.

Логіка тісно пов'язана з програмуванням із самого початку його виникнення. В межах математичної логіки запропоновано перші формалізації понять алгоритму й алгоритмічно обчислюваної функції, мови програмування базуються на тих чи інших уточненнях цих понять. Апарат математичної логіки (алгебра логіки) лежить в основі схемотехніки комп'ютерів. Подальший розвиток інформатики й програмування та пов'язана з цим поява нових задач і проблем характеризується залученням до їх розв'язку все нових понять і засобів математичної логіки. На даний момент розроблено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в програмуванні (див., напр., [1]). Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Ця логіка добре досліджена, вона має багатий досвід застосування. На основі класичної будуються спеціальні логіки, орієнтовані на вирішення тих чи інших конкретних задач. Водночас поява нових застосувань логіки в інформатиці та програмуванні висвітила принципові обмеження класичної логіки предикатів, які ускладнюють її використання. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, а для програмування характерне використання часткових відображень над складними даними, які можуть бути неоднозначними. Тому особливої актуальності набуває проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логік. Таку побудову доцільно проводити на базі спільного для логіки і програмування композиційно-номінативного підходу. На основі цього підходу розроблено низку логічних формалізмів, що знаходяться на різних рівнях абстрактності й загальності (див., напр., [2–6]). Композиційно-номінативні логіки базуються на класах квазіарних відображень – часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень.

Метою даної роботи є дослідження семантичних і синтаксичних аспектів чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік (ЧКНЛ). Розглянуто класи ЧКНЛ часткових і тотальних, однозначних і неоднозначних квазіарних предикатів. Описано семантичні властивості ЧКНЛ, особливу увагу приділено вивченню композиційних предикатних алгебр та класів інтерпретацій (семантик), відношень логічного наслідку для множин формул. Для таких відношень побудовано низку числень секвенційного типу. Характерна особливість цих числень – розширені умови замкненості секвенції та оригінальні форми елімінації кванторів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [2, 3]. Нагадаємо основні визначення та позначення.

Нехай V і A – довільні множини, трактуємо їх як множину предметних імен (змінних) і множину предметних значень. V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це часткова однозначна функція $d : V$® A. V-A-ІМ зазвичай подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,..., v_n \mapsto a_n, ...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Клас всіх V-A-ІМ позначаємо ${}^V\!A$.

Вводимо функцію $asn : {}^V\!A \to 2^V$ таким чином: $asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Для V-A-ІМ вводимо операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем x та операцію ∇ накладки:

$$d\|_{-x} = [v \mapsto a \in d \mid v \neq x];\ \ \delta\nabla\eta = \eta \cup [v \mapsto a \in \delta \mid v \notin asn(\eta)].$$

Параметричну операцію реномінації $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n} : {}^V A \to {}^V A$ задаємо так: $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(d) = d \nabla [v_1 \mapsto d(x_1),..., v_n \mapsto (x_n)]$. Якщо параметри реномінації відсутні, маємо тотожну реномінацію r, вона діє як тотожне відображення: $\mathrm{r}(d) = d$.

В подальшому викладі використаємо скорочення $\overline{y}$ для $y_1,..., y_n$. Замість $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ тоді можна писати $\mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}}$.

Послідовне застосування двох операцій $\mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}}$ (зовнішня) та $\mathrm{r}_{\overline{y}}^{\overline{u}}$ (внутрішня) можна подати [3, 7] у вигляді однієї, яку назвемо згорткою операцій $\mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}}$ та $\mathrm{r}_{\overline{y}}^{\overline{u}}$ і будемо позначати $\mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}} \Box_{\overline{y}}^{\overline{u}}$. Тоді маємо $\mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}}(\mathrm{r}_{\overline{y}}^{\overline{u}}(d) = \mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}} \bullet_{\overline{y}}^{\overline{u}} (d)$.

1. Квазіарні предикати

Під *V*-*A*-квазіарним предикатом будемо розуміти часткову неоднозначну, взагалі кажучи, функцію вигляду $P : {}^V A ® \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Ми трактуємо часткові неоднозначні квазіарні предикати як відношення між ${}^V A$ та $\{T, F\}$, такі предикати названо [3] предикатами реляційного типу, назвемо їх *R*-предикатами. Множину значень, які предикат *P* може прийняти на $d \in {}^V A$, позначаємо $P(d)$. Маємо $P(d) \subseteq \{T, F\}$, тому $P(d)$ може бути одним із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Кожний предикат $P : {}^V A ® \{T, F\}$ задається областю істинності та областю хибності, це множини

$$T(P) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d)\} \text{ та } F(P) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d)\}.$$

Ім'я $z \in V$ неістотне для *V*-*A*-квазіарного предиката *P*, якщо з умови $d_1 \|_{-x} = d_2 \|_{-x}$ випливає $P(d_1) = P(d_2)$.

V-*A*-квазіарний предикат *P*:

– однозначний, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$;

– тотальний, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^V A$;

– неспростовний (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваний, якщо $T(P) \neq \varnothing$;

– тотально істинний, якщо $T(P) = {}^V A$, тотально хибний, якщо $F(P) = {}^V A$;

– тотожно істинний, якщо $T(P) = {}^V A$ та $F(P) = \varnothing$, тотожно хибний, якщо $T(P) = \varnothing$ та $F(P) = {}^V A$;

– всюди невизначений, якщо $T(P) = \varnothing$ та $F(P) = \varnothing$;

– тотально насичений (повне бінарне відношення), якщо $T(P) = {}^V A$ та $F(P) = {}^V A$.

Кожний неспростовний та кожний невиконуваний предикат є однозначними.

Часткові однозначні *V*-*A*-квазіарні предикати назвемо *P*-предикатами, тотальні – *T*-предикатами, тотальні однозначні – *TS*-предикатами. Класи таких предикатів відповідно позначаємо PrR_A^V, PrP_A^V, PrT_A^V, $PrTS_A^V$.

Всюди невизначений *V*-*A*-квазіарний предикат позначаємо як $\perp_A^V$, тотожно істинний – як T_A^V, тотожно хибний – як F_A^V, тотально насичений – як $\Box_A^V$. Якщо *V* і *A* маються на увазі, ці предикати позначаємо $\perp$, T, F, $\Box$.

Предикат $P : {}^V A \to \{T, F\}$ монотонний, якщо з $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \subseteq P(d')$.

Предикат $P : {}^V A \to \{T, F\}$ антитонний, якщо з $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \supseteq P(d')$.

Константні предикати $\perp$, T, F, $\Box$ є монотонними й антитонними.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Однозначний предикат $P : {}^V A \to \{T, F\}$ еквітонний, якщо з умови $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Монотонні *R*-предикати, антитонні *R*-предикати, еквітонні *P*-предикати, антитонні *T*-предикати будемо називати *RM*-предикатами, *RA*-предикатами, *PE*-предикатами, *TA*-предикатами. Класи *V*-*A*-квазіарних *RM*-предикатів, *RA*-предикатів, *PE*-предикатів, *TA*-предикатів позначимо відповідно $PrRM_A^V, PrRA_A^V, PrPE_A^V$, $PrTA_A^V$.

Предикат $\widetilde{P}$ назвемо дуальним до предиката *P*, якщо $T(\widetilde{P}) = \overline{F(P)}$ та $F(\widetilde{P}) = \overline{T(P)}$.

Для *V*-*A*-квазіарного предиката *P*, трактованого як реляція $P \subseteq {}^V A \times Bool$, можна розглядати предикат $\overline{P}$ – доповнення до *P* як до реляції. Тоді $T(\overline{P}) = \overline{T(P)}$ та $F(\overline{P}) = \overline{F(P)}$. Звідси $T(\widetilde{P}) = F(\overline{P}); F(\widetilde{P}) = T(\overline{P})$.

Прикладом пари взаємно дуальних та взаємно доповнених предикатів є $\perp$ та $\Box$.

Твердження 1. *Q* монотонний $\Rightarrow$ $\overline{Q}$ та $\widetilde{Q}$ антитонні; *Q* антитонний $\Rightarrow$ $\overline{Q}$ та $\widetilde{Q}$ монотонні.

Твердження 2. $Q \in PrP_A^V \Leftrightarrow \widetilde{Q} \in PrT_A^V \Leftrightarrow \overline{Q} \in PrT_A^V$; $Q \in PrT_A^V \Leftrightarrow \widetilde{Q} \in PrP_A^V \Leftrightarrow \overline{Q} \in PrP_A^V$; $Q \in PrTS_A^V \Leftrightarrow \overline{Q} \in PrTS_A^V$; $Q \in PrTS_A^V \Rightarrow \widetilde{Q} = Q$.

Задамо відображення дуалізації $\delta : PrR_A^V \to PrR_A^V$ наступним чином: $\delta(P) = \widetilde{P}$ для кожного $P \in PrR_A^V$.

Відображення дуалізації інволютивне: $\delta(\delta(P)) = P$ для кожного $P \in PrR_A^V$.

Твердження 3. δ(T) = T, δ(F) = F, δ(⊥) = □, δ(□) = ⊥, $\delta(PrP_A^V) = PrT_A^V$, $\delta(PrT_A^V) = PrP_A^V$, $\delta(PrTS_A^V) =$ $= PrTS_A^V$, $\delta(PrPE_A^V) = PrTA_A^V$, $\delta(PrTA_A^V) = PrTA_A^V$, $\delta(PrRM_A^V) = PrRA_A^V$, $\delta(PrRM_A^V) = PrRA_A^V$.

2. Композиційні алгебри квазіарних предикатів

Опишемо композиції квазіарних предикатів.

На пропозиційному рівні композиції працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями, їх називають логічними зв'язками. Основними є 1-арна композиція заперечення ¬ та 2-арні композиції диз'юнкція ∨, кон'юнк ція &, імплікація →, еквіваленція ↔. Предикати ¬(*P*), ∨(*P*, *Q*), →(*P*, *Q*), &(*P*, *Q*), ↔(*P*, *Q*) далі традиційно позначаємо ¬*P*, *P*∨*Q*, *P*→*Q*, *P*&*Q*, *P*↔*Q*. Як базові пропозиційні композиції візьмемо ¬ та ∨.

Предикати ¬*P* та *P*∨*Q* задамо через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q)$; $F(P\vee Q) = (P)\cap F(Q)$.

Композиції →, &, ↔ є похідними, вони виражаються через ¬ та ∨:

$$P\to Q = \neg P\vee Q;\ P\&Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);\ P\leftrightarrow Q = (P\to Q)\&(Q\to P).$$

Твердження 4. Маємо $\overline{P} = \neg\tilde{P}$ та $\tilde{P} = \neg\overline{P}$.

Твердження 5. Для предикатів ⊥,□, T, F маємо:

1) ¬⊥ = ⊥, ⊥∨⊥ = ⊥; ¬□ = □, □∨□ = □;

2) ¬T = F, ¬F = T, T∨T = T, T∨F = F∨T = T, F∨F = F;

3) T∨⊥ = ⊥∨T = T, F∨⊥ = ⊥∨F = ⊥; T∨□ = □∨T = □, F∨□ = □∨F = □; ⊥∨□ = □∨⊥ = T.

На рівні ЧКНЛ до логічних зв'язок додаємо композиції реномінації та квантифікації.

Параметричну композицію реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \to Pr^A$ задамо так: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$ для кожного $d\in{}^VA$.

Композиція R з відсутніми параметрами – тотожна реномінація, – діє як тотожне відображення: R(*P*) = *P*.

Параметричну композицію квантифікації ∃*x*: $Pr^A \to Pr^A$ візьмемо як базову; задамо її через області істинності та хибності відповідного предиката ∃*xP*:

$$T(\exists xP) = \{d\in{}^VA \mid d\,\nabla\, x\mapsto a \in T(P) \text{ для деякого } a\in A\};$$

$$F(\exists xP) = \{d\in{}^VA \mid d\,\nabla\, x\mapsto a \in F(P) \text{ для всіх } a\in A\}.$$

Композиція ∀*x* є похідною, вона задається такою умовою: ∀*xP* = ¬∃*x*¬*P*.

Композиції ¬, ∨, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, ∃*x* назвемо базовими композиціями ЧКНЛ.

Твердження 6. 1) Для предикатів ⊥ та □ маємо: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\perp) = \perp, \exists x(\perp) = \perp$; $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\square) = \square, \exists x(\square) = \square$;

2) для предикатів T та F маємо: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$, $\exists x(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$; $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$, $\exists x(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.

Теорема 1. Композиції ¬, ∨, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, ∃*x* зберігають:

1) однозначність та тотальність квазіарних предикатів;

2) монотонність та антитонність квазіарних предикатів.

Наслідок 1. 1) Множини {⊥}, {□}, {T, F}, {⊥, □, T, F} замкнені відносно ¬, ∨, →, &, ↔, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, ∃*x*, ∀*x*;

2) класи *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів замкнені відносно $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$;

3) класи монотонних, антитонних, еквітонних предикатів замкнені відносно $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Композиційну алгебру $QR_A^V = (PrR_A^V, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$, назвемо чистою першопорядковою алгеброю квазіарних предикатів.

Необхідна умова, щоб певний клас квазіарних предикатів утворив алгебру – його замкненість щодо операцій алгебри, у нашому випадку – щодо $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$. Те, що $\aleph$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{R}$, позначатимемо $\aleph \prec \mathfrak{R}$.

Таким чином, можна виділити низку підалгебр алгебри QR_A^V:

$QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$ – алгебра *P*-предикатів;

$QT_A^V = (PrT_A^V, CQ)$ – алгебра *T*-предикатів;

$QTS_A^V = (PrTS_A^V, CQ)$ – алгебра *TS*-предикатів; маємо $QTS_A^V \prec QP_A^V$ та $QTS_A^V \prec QT_A^V$;

$QRM_A^V = (PrRM_A^V, CQ)$ – алгебра монотонних *R*-предикатів;

$QRA_A^V = (PrRA_A^V, CQ)$ – алгебра антитонних *R*-предикатів;

$QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$ – алгебра еквітонних *P*-предикатів; маємо $QPE_A^V \prec QP_A^V$ та $QPE_A^V \prec QRM_A^V$;

$QTA_A^V = (PrTA_A^V, CQ)$ – алгебра антитонних *T*-предикатів; маємо $QTA_A^V \prec QT_A^V$ та $QTA_A^V \prec QRA_A^V$;

сингулярні алгебри $\perp_{V\text{-}A} = (\{\perp_A^V\}, CQ)$ та $\Box_{V\text{-}A} = (\{\Box_A^V\}, CQ)$; для них маємо $\perp_{V\text{-}A} \prec QPE_A^V$ та $\Box_{V\text{-}A} \prec QTA_A^V$;

алгебра $\mathrm{B}_{V\text{-}A} = (\{\mathrm{T}_A^V, \mathrm{F}_A^V\}, CQ)$; маємо $\mathrm{B}_{V\text{-}A} \prec QTS_A^V$, $\mathrm{B}_{V\text{-}A} \prec QPE_A^V$, $\mathrm{B}_{V\text{-}A} \prec QTA_A^V$;

алгебра $\mathrm{BL}_{V\text{-}A} = (\{\perp_A^V, \Box_A^V, \mathrm{T}_A^V, \mathrm{F}_A^V\}, CQ)$; тоді $\mathrm{BL}_{V\text{-}A} \prec QRM_A^V$, $\mathrm{BL}_{V\text{-}A} \prec QRA_A^V$, а також $\perp_{V\text{-}A}, \Box_{V\text{-}A}, \mathrm{B}_{V\text{-}A} \prec \mathrm{BL}_{V\text{-}A}$.

Нехай δ – відображення дуалізації. Алгебри (Pr_1, CQ) і (Pr_2, CQ) дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1) = \mathrm{Pr}_2$ та $\delta(\mathrm{Pr}_2) = \mathrm{Pr}_1$.

Отже, маємо пари дуальних алгебр QP_A^V та QT_A^V, QPE_A^V та QTA_A^V, QRM_A^V та QRA_A^V, $\perp_{V\text{-}A}$ та $\Box_{V\text{-}A}$.

Алгебри QR_A^V, QTS_A^V, $\mathrm{B}_{V\text{-}A}$, $\mathrm{BL}_{V\text{-}A}$ автодуальні.

Властивості квазіарних предикатів та їх композицій описано в [2–6]. Властивості пропозиційних композицій в цілому аналогічні властивостям відповідних класичних логічних зв'язок, те саме стосується більшості властивостей кванторів. Водночас [3, 4] для квазіарних предикатів вже невірні деякі пов'язані з кванторами закони класичної логіки. В цій роботі обмежимось розглядом властивостей, пов'язаних з реномінаціями та кванторами.

Розглянемо основні властивості композицій реномінації (див. також [3, 6]).

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація.

RI) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – згортка пари тотожних імен.

RU) Нехай $z \in V$ неістотне для предиката *P*. Тоді $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

Згортку $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ композицій $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ і $\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ задаємо так: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (P)(d) = P(\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}} (d))$. Звідси:

RR) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (P)$.

Опишемо взаємодію реномінацій та логічних зв'язок і кванторів.

Ren) $\exists yP = \exists z\mathrm{R}_z^y(P)$ за умови *z* неістотне для *P* – перейменування кванторного імені.

R¬) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – R¬-дистрибутивність.

R∨) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$ – R∨-дистрибутивність.

R∃s) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, якщо $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ – проста (обмежена) R∃-дистрибутивність.

R∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (P)$, якщо z неістотне для P та $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ – R∃-дистрибутивність.

Для опису властивостей елімінації кванторів використаємо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати-індикатори Ez, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним $z\in V$. Подібні предикати-індикатори εz, пов'язані з Ez (маємо $Ez = \neg\varepsilon z$), використані в низці робіт [4–9].

Предикати Ez задаємо так: $T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in {}^VA \mid z\in asn(d)\}$; $F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in {}^VA \mid z\notin asn(d)\}$.

Предикати Ez не є монотонними і не є антитонними. Кожне $x\in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

Теорема 2. Для R-предикатів справджуються наступні співвідношення:

$T(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$; зокрема, $T(\mathrm{R}_y^x(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\exists xP)$;

$F(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$; зокрема, $F(\exists xP) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}_y^x(P))$;

$T(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \subseteq F(Ey) \cup T(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$; зокрема, $T(\mathrm{R}_y^x(P)) \subseteq F(Ey) \cup T(\exists xP)$;

$F(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \subseteq F(Ey) \cup F(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$; зокрема, $F(\exists xP) \subseteq F(Ey) \cup F(\mathrm{R}_y^x(P))$.

3. Мови та семантичні моделі ЧКНЛ

Семантичними моделями ЧКНЛ є [2, 3] чисті першопорядкові композиційні системи квазіарних предикатів. Вони мають вигляд (${}^VA$, Pr, CQ). Композиційна система (${}^VA$, Pr, CQ) задає алгебру даних (A, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, CQ). Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови ЧКНЛ.

Алфавіт мови ЧКНЛ: множина V предметних імен (змінних), в якій виділена множина $U\subseteq V$ тотально неістотних [3] імен; множина Ps предикатних символів; множина $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ символів базових композицій.

Множину Ps називають сигнатурою мови; четвірку $\Sigma = (V, U, Cs, Ps)$ назвемо розширеною сигнатурою мови.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул:

FA) $Ps\subseteq Fr$; формули $p\in Ps$ назвемо атомарними;

FC) $\Phi, \Psi\in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi\in Fr$.

Для зручності далі використовуємо скоро чення формул (див. [2, 3]), користуючись символами похідних композицій, дужками "(", ")" та інфіксною формою запису. Наприклад, $\Phi\to\Psi$ – скорочення формули $\vee\neg\Phi\Psi$.

Позначимо $nm(\Phi)$ множину тих $x\in V$, які фігурують у символах реномінації та квантифікації формули Φ.

Інтерпретуємо мову на композиції них системах (${}^VA$, Pr, CQ). Імена $x\in V$ позначають елементи множини базових даних A, символи композицій – композиції із CQ. Символи Ps позначають базові предикати в множині Pr, для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I : Ps \to \mathrm{Pr}$. Із базових предикатів за допомогою композицій будуємо складніші, які позначаються формулами. Відображення інтерпретації формул $I : Fr \to \mathrm{Pr}$ задамо як розширення $I : Ps \to \mathrm{Pr}$ згідно побудови формул із простіших за допомогою символів Cs:

IF) $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$, $I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$; $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійку $\boldsymbol{J}$ = (CS, Σ, I) назвемо інтерпретацією мови ЧКНЛ сигнатури Σ. Інтерпретації будемо скорочено позначати (A, I). Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_J.

Визначимо для формул множини гарантовано неістотних імен за допомогою відображення $\nu : Fr\to 2^V$ так.

Для $p\in Ps$ візьмемо $\nu(p) = U$, а далі [2] для кожної $\Phi\in Fr$ задаємо: $\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$; $\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi)\cap\nu(\Psi)$; $\nu(R_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}\Phi) = (\nu(\Phi)\cup\{v_1,\ldots,v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i\notin\nu(\Phi), i \in \overline{1,n}\}$, $\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi)\cup\{x\}$. Кожне $u\in\nu(\Phi)$ неістотне [2] для Φ.

Для $\Gamma\subseteq Fr$ задаємо $\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi\in\Gamma}\nu(\Phi)$. Задамо множину "нових" для Γ неістотних імен: $fu(\Gamma) = U \setminus nm(\Gamma)$.

Виділення підалгебр квазіарних предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій. Можна говорити про загальний клас R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій, T-інтерпретацій, TS-інтерпретацій, а також

PE-інтерпретацій, *TA*-інтерпретацій, *RM*-інтерпретацій, *RA*-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають семан тиками, будемо їх відповідно позначати ***R***, ***P***, ***T***, ***TS***, ***PE***, ***TA***, ***RM***, ***RA***.

Логіки $*$-предикатів будемо називати логіками з $*$-семантикою; тут $*$ – одне з *R*, *P*, *T*, *TS*, *PE*, *TA*, *RM*, *RA*.

Семантики ***P***, ***T***, ***R*** в [3] названо неокласичною, пересиченою, загальною.

Для зазначених семантик маємо такі співвідношення:

Теорема 3. $\boldsymbol{TS}\subset\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{TS}\subset\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{PE}\subset\boldsymbol{RM}\subset\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{TA}\subset\boldsymbol{RA}\subset\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{PE}\subset\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{TA}\subset\boldsymbol{T}$.

Відображення дуалізації δ продовжимо на класи інтерпретацій.

Інтерпретацію $\delta(\boldsymbol{J}) = (A, I_\delta)$ назвемо дуальною до інтерпретації $\boldsymbol{J} = (A, I)$, якщо для кожного $p\in Ps$ маємо $T(p_{\delta(J)}) = \overline{F(p_J)}$ та $F(p_{\delta(J)}) = \overline{T(p_J)}$. Тоді $\boldsymbol{J}$ дуальна до $\delta(\boldsymbol{J})$: $T(p_J) = \overline{F(p_{\delta(J)})}$ та $F(p_J) = \overline{T(p_{\delta(J)})}$.

Теорема 4. Інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та ϑ дуальні $\Rightarrow$ для всіх $\Phi\in Fr$ маємо $T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)}$ та $F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}$.

Якщо $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{G}$ дуальні, то: Φ_J монотонний $\Leftrightarrow$ Φ_G антитонний; Φ_G антитонний $\Leftrightarrow$ Φ_J монотонний.

Виділення дуальних пар предикатних алгебр індукує виділення дуальних семантик.

Твердження 7. Маємо такі дуальні пари: ***P*** та ***T***, ***PE*** та ***TA***, ***RM*** та ***RA***. Семантики ***R*** та ***TS*** автодуальні.

Для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}$ можна збудувати $\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{TS}$: для кожного $p\in Ps$ маємо $T(p_J)\subseteq T(p_H) = {}^VA$ та $F(p_J)\subseteq F(p_H) = {}^VA$. Таку ***H*** називають системою тотальних розширень для ***J***. Згідно теореми про розширення [2] для кожної $\Phi\in Fr$ тоді маємо $T(\Phi_J)\subseteq T(\Phi_H) = {}^VA$ та $F(\Phi_J)\subseteq F(\Phi_H) = {}^VA$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації ***J***, або ***J***-виконувана, якщо Φ_J – виконуваний предикат.

Формула Φ виконувана в класі інтерпретацій ***K***, якщо Φ ***J***-виконувана при деякій $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Кожна формула виконувана в ***T*** та виконувана в ***R*** (беремо інтерпретацію, задану алгеброю $\square_{V\text{-}A}$).

Отже, поняття виконуваної формули змістовне лише для *P*-інтерпретацій.

Формула Φ неспростовна при інтерпретації ***J***, або ***J***-неспростовна (позн. $\boldsymbol{J}\models\Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний. Формула Φ неспростовна в класі інтерпретацій ***K*** (позн. ${}^K\!\models\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}\models\Phi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації ***J*** (позн. $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$), якщо Φ_J – тотально істинний предикат.

Формула Φ тотально істинна в класі інтерпретацій ***K*** (позн. ${}^K|\!\equiv\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації ***J*** (позн. ${}^K\!\models_{id}\Phi$), якщо $\Phi_J = \mathrm{T}$.

Формула Φ тотожно істинна в класі інтерпретацій ***K***, якщо ${}^K\!\models_{id}\Phi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{K}$.

Подібним чином даємо визначення тотально хибної при інтерпретації ***J*** та тотально хибної в ***K*** формули; тотожно хибної при інтерпретації ***J*** та тотожно хибної в ***K*** формули.

Теорема 5. 1) $\{\Phi\,|\,{}^R\!\models\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^R|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^R\!\models_{id}\Phi\} = \varnothing$;

2) $\{\Phi\,|\,{}^P|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^P\!\models_{id}\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^T\!\models\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^T\!\models_{id}\Phi\} = \varnothing$;

3) $\{\Phi\,|\,{}^P\!\models\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^T|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^{TS}\!\models_{id}\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^{TS}\!\models\Phi\} = \{\Phi\,|\,{}^{TS}|\!\equiv\Phi\}$.

Твердження 8. ${}^P\!\models\Phi\Leftrightarrow\neg\Phi$ невиконувана в ***P***.

Теорема 6. ${}^P\!\models\Phi\Leftrightarrow{}^T|\!\equiv\Phi$ та ${}^P\!\models\Phi\Leftrightarrow{}^{TS}\!\models_{id}\Phi$.

Маємо $\boldsymbol{J}\models\Phi$ при $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}\Leftrightarrow\vartheta\models\Phi$ при дуальній $\vartheta\in\boldsymbol{T}$. Звідси отримуємо перше твердження.

Доводимо друге твердження. Якщо ${}^{TS}\!\not\models_{id}\Phi$, то $F(\Phi_J)\neq\varnothing$ для деякої $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{TS}$, тому ${}^P\!\not\models\Phi$ в силу $\boldsymbol{TS}\subset\boldsymbol{P}$.

Якщо ${}^P\!\not\models\Phi$, то $F(\Phi_J)\neq\varnothing$ для деякої $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P}$. Візьмемо для ***J*** систему тотальних розширень $\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{TS}$. Тоді $F(\Phi_J)\subseteq F(\Phi_M)$, звідки $F(\Phi_M)\neq\varnothing$, тому ${}^{TS}\!\not\models_{id}\Phi$.

Поняття тавтології для ЧКНЛ вводимо традиційним чином. Формула пропозиційно нерозкладна, якщо вона атомарна чи має вигляд $\exists x\Phi$ чи $R^{\bar v}_{\bar x}\,\Phi$. Нехай Fr_0 – множина пропозиційно нерозкладних формул. Істиннісна оцінка мови – це тотальне відображення $\tau: Fr_0\to\{T, F\}$. Продовжимо τ до відображення $\tau: Fr\to\{T, F\}$ згідно дії $\neg$ та $\vee$ на предикати (див. [2]). Формула Φ тавтологія, якщо $\tau(\Phi) = T$ для кожної істиннісної оцінки τ.

Твердження 9. Φ тавтологія $\Rightarrow{}^{TS}\!\models_{id}\Phi$.

Нехай Φ утворена із пропозиційно нерозкладних формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Нехай ${}^{TS}\!\not\models_{id}\Phi$, тоді $\Phi(d) = F$ для деяких $\boldsymbol{J} = (A, I)\in\boldsymbol{TS}$ та $d\in{}^VA$. Візьмемо істиннісну оцінку τ: $\tau(\varphi_i) = \varphi_{iJ}(d)$. Тоді $\tau(\Phi) = F$, тому Φ не тавтологія.

Наслідок 2. Пропозиційна формула Φ є тавтологія $\Leftrightarrow$ ${}^{TS}|\!=_{id}\Phi \Leftrightarrow {}^{P}|\!=\Phi \Leftrightarrow {}^{T}|\!\equiv\Phi$.

4. Відношення логічного наслідку та логічної еквівалентності

На множині формул можна ввести низку відношень, які формалізують фундаментальне поняття логічного наслідку. Спочатку вводимо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

1) Істиннісний, або T-наслідок ${}_{J}|\!=_{T}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{T}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$.

2) Хибнісний, або F-наслідок ${}_{J}|\!=_{F}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{F}\Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$.

3) Сильний, або TF-наслідок ${}_{J}|\!=_{TF}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{TF}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$ та $F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$.

4) Неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_{J}|\!=_{IR}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{IR}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J) = \varnothing$.

5) Дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_{J}|\!=_{DI}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{DI}\Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J) = {}^{V}A$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці α визначаємо за схемою:

$$\Phi\ {}^{\alpha}|\!=_{*}\Psi,\ \text{якщо}\ \Phi\ {}_{J}|\!=_{*}\Psi\ \text{для кожної}\ \boldsymbol{J}\in\alpha.$$

Зазначені відношення описано в [3–6]. Окрім цих відношень, в [10] досліджено ще такі.

6) C-наслідок ${}_{J}|\!=_{C}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{C}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J)$.

7) $T\vee F$-наслідок ${}_{J}|\!=_{T\vee F}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{T\vee F}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$ або $F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$.

Вони продукують відповідні відношення логічного наслідку, нетривіальними та відмінними від інших є ${}^{P}|\!=_{T\vee F}$ та ${}^{R}|\!=_{C}$. Проте ${}^{P}|\!=_{T\vee F}$ та ${}^{R}|\!=_{C}$ нетранзитивні, для них невірні деякі властивості декомпозиції формул (про це нижче). C-наслідок для пропозиційної логіки розглядався в [11], проте із певними неточностями (див. [10]).

Безпосередньо із визначень отримуємо, що усі визначені вище відношення рефлексивні.

Також маємо: ${}_{J}|\!=_{IR}\subseteq{}_{J}|\!=_{C}$, ${}_{J}|\!=_{DI}\subseteq{}_{J}|\!=_{C}$; ${}_{J}|\!=_{TF}\subseteq{}_{J}|\!=_{T}\subseteq{}_{J}|\!=_{T\vee F}$, ${}_{J}|\!=_{TF}\subseteq{}_{J}|\!=_{F}\subseteq{}_{J}|\!=_{T\vee F}$.

Теорема 7. Нехай інтерпретації $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ дуальні. Тоді маємо:

1) $\Phi\ {}_{A}|\!=_{T}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{F}\Psi$ та $\Phi\ {}_{A}|\!=_{F}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{T}\Psi$;

2) $\Phi\ {}_{A}|\!=_{IR}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{DI}\Psi$ та $\Phi\ {}_{A}|\!=_{DI}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{IR}\Psi$;

3) $\Phi\ {}_{A}|\!=_{TF}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{TF}\Psi$;

4) $\Phi\ {}_{A}|\!=_{C}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{C}\Psi$; $\Phi\ {}_{A}|\!=_{T\vee F}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!=_{T\vee F}\Psi$.

Зауважимо, що пп. 1–3 теореми доведено в [3], п.4 доведено в [10].
Відношення C-наслідку та TF-наслідку пов'язані таким чином (див. [10]):

Теорема 8. Маємо $\Phi\ {}_{J}|\!=_{C}\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi, \Phi\ {}_{J}|\!=_{TF}\Psi, \neg\Phi$.

Звідси як наслідок отримуємо: $\Phi\ {}^{R}|\!=_{C}\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi, \Phi\ {}^{R}|\!=_{TF}\Psi, \neg\Phi$.

У випадках класичної логіки та логіки TS-предикатів усі наведені відношення логічного наслідку втрачають відмінності, вони збігаються і стають єдиним відношенням, яке позначимо ${}^{TS}|\!=$. Отже:

Твердження 10. ${}^{TS}|\!=_{TF} = {}^{TS}|\!=_{T} = {}^{TS}|\!=_{F} = {}^{TS}|\!=_{IR} = {}^{TS}|\!=_{DI} = {}^{TS}|\!=_{C} = {}^{TS}|\!=_{T\vee F} = {}^{TS}|\!=$.

Для запропонованих відношень маємо такі властивості (доведення див. [3, 10]):

Теорема 9. 1) ${}^{P}|\!=_{DI} = {}^{T}|\!=_{IR} = {}^{R}|\!=_{IR} = {}^{R}|\!=_{DI} = \varnothing$;
2) ${}^{P}|\!=_{T} = {}^{T}|\!=_{F}$; ${}^{P}|\!=_{F} = {}^{T}|\!=_{T}$; ${}^{P}|\!=_{IR} = {}^{T}|\!=_{DI}$; ${}^{P}|\!=_{TF} = {}^{T}|\!=_{TF}$; ${}^{P}|\!=_{T\vee F} = {}^{T}|\!=_{T\vee F}$; ${}^{R}|\!=_{T} = {}^{R}|\!=_{F} = {}^{R}|\!=_{TF}$;
3) ${}^{P}|\!=_{IR} = {}^{T}|\!=_{DI} = {}^{P}|\!=_{C} = {}^{T}|\!=_{C} = {}^{TS}|\!=$.

Таким чином, із перелічених вище відношень не більше 7 різних. Виділимо ці відношення:

$${}^{P}|\!=_{IR},\ {}^{P}|\!=_{T\vee F},\ {}^{P}|\!=_{T},\ {}^{P}|\!=_{F},\ {}^{P}|\!=_{TF},\ {}^{R}|\!=_{C},\ {}^{R}|\!=_{TF}.$$

Розглянемо питання, пов'язані з транзитивністю розглянутих відношень.

Твердження 11. Відношення ${}_{J}|\!=_{T}$, ${}_{J}|\!=_{F}$, ${}_{J}|\!=_{TF}$ та відношення ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$ є транзитивними.
Відношення наслідку ${}_{A}|\!=_{IR}$ нетранзитивне. Справді, маємо

Приклад 1. Нехай $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{P}$, $p, q, s\in Ps$. Задамо p_A як T, q_A як $\perp$, s_A як F. Тоді $p\ {}_{A}|\!=_{IR}q$, $q\ {}_{A}|\!=_{IR}s$, проте $p\ {}_{A}|\!\neq_{IR}s$.
Водночас для відношення логічного наслідку ${}^{P}|\!=_{IR}$ ситуація нормалізується (див. [3, 10]):

Теорема 10. Відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ транзитивне.

Приклад 2. Нехай $p, q \in Ps$, Φ – це формула $p \vee (q \& \neg q)$, Ψ – це $p \,\&\, (q \vee \neg q)$. Тоді $\Phi\, {}^{P}|\!=_{T \vee F}\, p$ та $p\, {}^{P}|\!=_{T \vee F}\, \Psi$. Водночас $p\, {}^{P}|\!=_{TF}\, \Phi$ та $\Psi\, {}^{P}|\!=_{TF}\, p$, тому $p\, {}^{P}|\!=_{T \vee F}\, \Phi$ та $\Psi\, {}^{P}|\!=_{T \vee F}\, p$. Проте [10] $\Phi\, {}^{P}|\!\neq_{T}\, \Psi$ та $\Phi\, {}^{P}|\!\neq_{F}\, \Psi$, тому $\Phi\, {}^{P}|\!\neq_{T \vee F}\, \Psi$.

Приклад 3. Нехай $p, q \in Ps$, Φ – це формула $p \vee (q \& \neg q)$, Ψ – це формула $p \,\&\, (q \vee \neg q)$. Тоді маємо $\Phi\, {}^{R}|\!=_{C}\, p$ та $p\, {}^{R}|\!=_{C}\, \Psi$. Водночас $p\, {}^{R}|\!=_{TF}\, \Phi$ та $\Psi\, {}^{R}|\!=_{TF}\, p$, тому $p\, {}^{R}|\!=_{C}\, \Phi$ та $\Psi\, {}^{R}|\!=_{C}\, p$. Проте [10] $\Phi\, {}^{R}|\!\neq_{C}\, \Psi$.

Таким чином, відношення ${}^{P}|\!=_{T \vee F}$ нетранзитивне та відношення ${}^{R}|\!=_{C}$ нетранзитивне. Отже, ці відношення не задовольняють постулату Тарського про транзитивність логічного наслідку.

Із пропозиційного рівня успадковується [2, 3] відношення $|\!=_{t}$ тавтологічного наслідку.

$\Phi\, |\!=_{t}\, \Psi$, якщо $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія. Таке $|\!=_{t}$ рефлексивне і транзитивне.

Теорема 11. 1) Для класичної семантики пропозиційної логіки усі розглянуті відношення збігаються;

2) Для пропозиційних формул маємо: $\Phi\, {}^{P}|\!=_{IR}\, \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}^{T}|\!=_{DI}\, \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}^{P}|\!=_{C}\, \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}^{T}|\!=_{C}\, \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}^{TS}|\!=\, \Psi \Leftrightarrow \Phi\, |\!=_{t}\, \Psi$;

Між розглянутими відношеннями логічного наслідку отримано такі співвідношення (див. [3, 4, 10]):

Теорема 12. 1) ${}^{P}|\!=_{TF} \subset {}^{P}|\!=_{T} \subset {}^{P}|\!=_{T \vee F}$, ${}^{P}|\!=_{TF} \subset {}^{P}|\!=_{F} \subset {}^{P}|\!=_{T \vee F}$, ${}^{P}|\!=_{T \vee F} \subset {}^{P}|\!=_{IR}$; ${}^{R}|\!=_{TF} \subset {}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF} \subset {}^{R}|\!=_{C} \subset {}^{P}|\!=_{IR}$;

2) ${}^{P}|\!=_{T} \not\subset {}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{F} \not\subset {}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{TF} \not\subset {}^{R}|\!=_{C}$, ${}^{R}|\!=_{C} \not\subset {}^{P}|\!=_{T \vee F}$;

3) $|\!=_{t} \subset {}^{P}|\!=_{IR}$; ${}^{P}|\!=_{T \vee F} \not\subset |\!=_{t}$, ${}^{R}|\!=_{C} \not\subset |\!=_{t}$.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності.
Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ задаємо [3] за схемою: $\Phi\, {}_{J}\!\sim_{*}\, \Psi$, якщо $\Phi\, {}_{J}|\!=_{*}\, \Psi$ та $\Psi\, {}_{J}|\!=_{*}\, \Phi$.
Для відношення ${}_{J}\!\sim_{TF}$ маємо: $\Phi\, {}_{J}\!\sim_{TF}\, \Psi \;\Leftrightarrow\; T(\Phi_{J}) = T(\Psi_{J})$ та $F(\Phi_{J}) = F(\Psi_{J})$. Отже, $\Phi\, {}_{J}\!\sim_{TF}\, \Psi \Leftrightarrow \Phi_{J} = \Psi_{J}$.
Відношення ${}_{J}\!\sim_{T}$, ${}_{J}\!\sim_{F}$, ${}_{J}\!\sim_{TF}$, ${}_{J}\!\sim_{TF}$ транзитивні, проте ${}_{J}\!\sim_{IR}$ нетранзитивне (див. приклад 1).
Відношення логічної еквівалентності ${}^{P}\!\sim_{IR}$, ${}^{P}\!\sim_{T}$, ${}^{P}\!\sim_{F}$, ${}^{P}\!\sim_{TF}$, ${}^{R}\!\sim_{TF}$, а також ${}^{P}\!\sim_{T \vee F}$, ${}^{R}\!\sim_{C}$, визначаємо за схемою:

$$\Phi\, {}^{\alpha}\!\sim_{*}\, \Psi, \text{ якщо } \Phi\, {}^{\alpha}|\!=_{*}\, \Psi \text{ та } \Psi\, |\!=_{*}\, \Phi.$$

Подібним чином визначаємо відношення тавтологічної еквівалентності $\sim_{t}$: $\Phi \sim_{t} \Psi$, якщо $\Phi\, |\!=_{t}\, \Psi$ та $\Psi\, |\!=_{t}\, \Phi$.

Твердження 12. $\Phi\, {}^{\alpha}\!\sim_{*}\, \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}_{J}\!\sim_{*}\, \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \alpha$.

Відношення ${}^{P}\!\sim_{IR}$, ${}^{P}\!\sim_{T}$, ${}^{P}\!\sim_{F}$, ${}^{P}\!\sim_{TF}$, ${}^{R}\!\sim_{TF}$, $\sim_{t}$ рефлексивні, транзитивні та симетричні.

Теорема 13 (див. [10]). Відношення ${}_{J}\!\sim_{T \vee F}$, ${}_{J}\!\sim_{C}$ та ${}^{P}\!\sim_{T \vee F}$, ${}^{R}\!\sim_{C}$ нетранзитивні.
Таким чином, ${}^{P}\!\sim_{T \vee F}$ та ${}^{R}\!\sim_{C}$ насправді не є відношеннями еквівалентності.
Властивості відношень логічного наслідку та логічної еквівалентності досліджено, зокрема, в [3–6, 10].
Основою еквівалентних перетворень формул є [2, 3] теорема еквівалентності. Вона формулюється для відношень ${}^{R}\!\sim_{TF}$, ${}^{P}\!\sim_{TF}$, ${}^{P}\!\sim_{IR}$. Для ${}^{P}\!\sim_{T}$ та ${}^{P}\!\sim_{F}$ теорема невірна, а ${}^{P}\!\sim_{T \vee F}$ та ${}^{R}\!\sim_{C}$ не є відношеннями еквівалентності.

Теорема 14. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1\, {}^{\alpha}\!\sim_{*}\, \Psi_1, ..., \Phi_n\, {}^{\alpha}\!\sim_{*}\, \Psi_n$, то $\Phi\, {}^{\alpha}\!\sim_{*}\, \Phi'$.

Властивості квазіарних предикатів індукують відповідні семантичні властивості формул (див. [3–6]).
Наведемо основні властивості, пов'язані з реномінаціями та кванторами (тут ~ – це ${}^{R}\!\sim_{TF}$ чи ${}^{P}\!\sim_{TF}$).

R) $R(\Phi) \square \Phi$;

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $z \in \nu(\Phi)$.

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)$.

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \sim \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

R∃s) $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x \Phi) \sim \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$ – проста (обмежена) R∃-дистрибутивність.

R∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \sim \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

5. Відношення логічного наслідку для множин формул

Відношення логічного наслідку поширимо на пари множин формул. Спочатку задамо відношення наслідку між двома множинами формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$. Нехай $\Gamma\subseteq Fr$, $\Delta\subseteq Fr$. Введемо позначення $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^{\wedge}(\Gamma_J)$, $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_J)$ як $F^{\wedge}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_J)$ як $T^{\vee}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є T-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_T \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J)\subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_F \Delta$), якщо $F^{\wedge}(\Delta_J)\subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_{TF} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J)\subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$ та $F^{\wedge}(\Delta_J)\subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є IR-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_{ID} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J)\cap F^{\wedge}(\Delta_J)=\varnothing$.

Δ є DI-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_{DI} \Delta$), якщо $F^{\vee}(\Gamma_J)\cup T^{\vee}(\Delta_J)={}^{V}\!A$.

Δ є C-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_C \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J)\cap F^{\wedge}(\Delta_J)\subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)\cup T^{\vee}(\Delta_J)$.

Δ є $T\vee F$-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ _J|\!=_{TF} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J)\subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$ або $F^{\wedge}(\Delta_J)\subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Відповідні відношення логічного наслідку для множин формул в семантиці α визначаємо за схемою:

$$\Gamma\ {}^{\alpha}|\!=_* \Delta, \text{ якщо } \Gamma\ _J|\!=_* \Delta \text{ для кожної } \boldsymbol{J}\in\alpha.$$

Наведемо характерні властивості відношень логічного наслідку для множин формул.

Теорема 15 Нехай інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ дуальні. Тоді:

1) $\Gamma\ _J|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_{DI} \Delta$ та $\Gamma\ _J|\!=_{DI} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_{IR} \Delta$;

2) $\Gamma\ _J|\!=_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_F \Delta$ та $\Gamma\ _J|\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_T \Delta$;

3) $\Gamma\ _J|\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_{TF} \Delta$;

4) $\Gamma\ _J|\!=_C \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_C \Delta$; $\Gamma\ _J|\!=_{T\vee F} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ _{\vartheta}|\!=_{T\vee F} \Delta$;

Із наведених відношень логічного наслідку для множин формул лише 7 різних. Виділимо ці відношення:

$${}^{P}|\!=_{IR},\ {}^{P}|\!=_{T\vee F},\ {}^{P}|\!=_{T},\ {}^{P}|\!=_{F},\ {}^{P}|\!=_{TF},\ {}^{R}|\!=_{C},\ {}^{R}|\!=_{TF}.$$

Відношення наслідку та логічного наслідку для множин формул рефлексивні й нетранзитивні [2, 3].

Розглянемо відношення логічного наслідку, коли одна з множин формул порожня. Такі властивості вивчались в [10]. Зауважимо, що $\varnothing\ _J|\!=_* \Delta$ означає $\mathrm{T}\ _J|\!=_* \Delta$, $\Gamma\ _J|\!=_* \varnothing$ означає $\Gamma\ _J|\!=_* \mathrm{F}$.

Теорема 16. $\varnothing\ {}^{P}|\!=_C \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ {}^{P}|\!=_{IR} \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ {}^{P}|\!=_F \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ {}^{T}|\!=_C \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ {}^{T}|\!=_{DI} \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ {}^{T}|\!=_T \Phi \Leftrightarrow {}^{P}|\!= \Phi \Leftrightarrow {}^{T}|\!\equiv \Phi$;
$\Phi\ {}^{P}|\!=_C \varnothing \Leftrightarrow \Phi\ {}^{P}|\!=_{IR} \varnothing \Leftrightarrow \Phi\ {}^{P}|\!=_F \varnothing \Leftrightarrow \Phi\ {}^{T}|\!=_C \varnothing \Leftrightarrow \Phi\ {}^{T}|\!=_{DI} \varnothing \Leftrightarrow \Phi\ {}^{T}|\!=_T \varnothing \Leftrightarrow {}^{P}|\!= \neg\Phi \Leftrightarrow {}^{T}|\!\equiv \neg\Phi$.

Розглянемо можливість перенесення формули з лівої частини логічного наслідку в праву і навпаки.

Теорема 17. 1) $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta$ та $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{IR} \Delta$;

2) $\Gamma\ {}^{R}|\!=_C \Delta, \Phi \Leftrightarrow \neg\Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!=_C \Delta$ та $\Gamma\ {}^{R}|\!=_C \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!=_C \Delta$;

Теорема 18. Можливі такі ситуації: 1) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_T \Delta$ та $\Gamma\ {}^{P}|\!\neq_T \Delta, \Phi$; $\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_T \Delta$ та $\Gamma\ {}^{P}|\!\neq_T \Delta, \neg\Phi$;

2) $\Gamma\ {}^{P}|\!=_F \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!\neq_F \Delta$; $\Gamma\ {}^{P}|\!=_F \Delta, \Phi$ та $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!\neq_F \Delta$;

3) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{TF} \Delta$ та $\Gamma\ {}^{P}|\!\neq_{TF} \Delta, \Phi$; $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{TF} \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!\neq_{TF} \Delta$;

4) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!=_{TF} \Delta$ та $\Gamma\ {}^{R}|\!\neq_{TF} \Delta, \Phi$; $\Gamma\ {}^{R}|\!=_{TF} \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!\neq_{TF} \Delta$;

5) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{T\vee F} \Delta$ та $\Gamma\ {}^{P}|\!\neq_{T\vee F} \Delta, \Phi$; $\Gamma\ {}^{P}|\!=_{T\vee F} \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!\neq_{T\vee F} \Delta$.

Отже, для ${}^{P}|\!=_{IR}$ та ${}^{R}|\!=_C$ можна робити перенесення формули з лівої частини логічного наслідку в праву і навпаки; для ${}^{P}|\!=_T$, ${}^{P}|\!=_F$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{P}|\!=_{T\vee F}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$ – не можна.

Теорема 19. 1) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_T \Delta$, $\Gamma\ {}^{P}|\!=_F \Delta, \neg\Psi, \Psi$, $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{TF} \Delta, \neg\Psi, \Psi$;

2) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!\neq_F \Delta$; $\Gamma\ {}^{P}|\!\neq_T \Delta, \neg\Psi, \Psi$; $\neg\Phi, \Phi, \Gamma\ {}^{R}|\!\neq_{TF} \Delta, \neg\Psi, \Psi$.

У випадку відношень для множин формул ${}^{R}|\!=_C$ зводиться до ${}^{R}|\!=_{TF}$ (тут позначення ${}^{\neg}\Sigma$ для $\{\neg\Phi \mid \Phi\in\Sigma\}$).

Теорема 20. Маємо $\Gamma\, {}^R|\!=_C \Delta \Leftrightarrow {}^\neg\Delta, \Gamma\, {}^R|\!=_{TF} \Delta, {}^\neg\Gamma$.

Аналогом теореми еквівалентності для множин формул є теорема заміни еквівалентних.

Теорема 21. Нехай $\Phi\, {}^\alpha\!\sim_* \Psi$, тоді маємо: $\Phi, \Gamma\, {}^\alpha|\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma\, {}^\alpha|\!=_* \Delta$; $\Gamma\, {}^\alpha|\!=_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma\, {}^\alpha|\!=_*|\!= \Delta, \Psi$.

Тут ${}^\alpha\!\sim_*$ та ${}^\alpha|\!=_*$ – це відповідно ${}^R\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{TF}$, ${}^P\!\sim_{IR}$ та ${}^R|\!=\sim_{TF}$, ${}^P|\!=\sim_{TF}$, ${}^P|\!=\sim_{IR}$.
Розглянемо властивості відношень логічного наслідку для множин формул на пропозиційному рівні.
Маємо [3–6] такі властивості декомпозиції формул (тут $|\!=$ – одне з відношень ${}^P|\!=_{IR}$, ${}^P|\!=_T$, ${}^P|\!=_F$, ${}^P|\!=_{TF}$, ${}^R|\!=_{TF}$):

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!= \Delta$.

$\neg\neg_R$) $\Gamma |\!= \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |\!= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |\!= \Delta$.

$\vee_R$) $\Gamma |\!= \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma |\!= \Delta$.

$\neg\vee_R$) $\Gamma |\!= \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma |\!= \Delta, \neg\Psi$.

Згідно теореми 17, для ${}^P|\!=_{IR}$ та ${}^R|\!=_C$ додатково справджуються:

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma\, {}^P|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}^P|\!=_{IR} \Delta, \Phi$.

$\neg_R$) $\Gamma\, {}^P|\!=_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\, {}^P|\!=_{IR} \Delta$.

Згідно теореми 18, для ${}^P|\!=_T$, ${}^P|\!=_F$, ${}^P|\!=_{TF}$ ${}^R|\!=_{TF}$ та ${}^P|\!=_{T\vee F}$ ці властивості невірні.
Не всі властивості декомпозиції формул вірні для ${}^P|\!=_{T\vee F}$ та ${}^R|\!=_C$ (відповідні приклади див. у [10]):

Теорема 22. Для відношень ${}^P|\!=_{T\vee F}$ та ${}^R|\!=_C$ властивості $\vee_L$ та $\neg\vee_R$ є невірними

Таким чином, для відношень ${}^P|\!=_{T\vee F}$ та ${}^R|\!=_C$, на додаток до їх нетранзитивності, вже невірні деякі властивості декомпозиції формул. Це не дає змоги безпосередньо будувати секвенційні числення для цих відношень. Водночас для відношення ${}^R|\!=_C$ ситуація не настільки погана, адже за теоремою 20 ${}^R|\!=_C$ зводиться до ${}^R|\!=_{TF}$. Тому перевірка наявності $\Gamma\, {}^R|\!=_C \Delta$ зводиться до перевірки наявності ${}^\neg\Delta, \Gamma\, {}^R|\!=_{TF} \Delta, {}^\neg\Gamma$.

Для всіх зазначених відношень маємо монотонність: якщо $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, то $\Gamma |\!= \Delta \Rightarrow \Lambda |\!= \Sigma$.

Розглянемо властивості, які гарантують наявність логічного наслідку. Для кожного з відношень маємо:

C) $\Phi, \Gamma |\!= \Delta, \Phi$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення логічного наслідку такі властивості

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\, {}^P|\!=_T \Delta$;

CR) $\Gamma\, {}^P|\!=_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\, {}^P|\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

В силу $\neg_L$ та $\neg_R$ явне виділення таких властивостей зайве для відношень ${}^P|\!=_{IR}$ та ${}^R|\!=_C$.

Наведемо властивості, пов'язані з реномінацією та кванторами. Вони отримуються на основі наведених вище властивостей R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\exists$s, R$\exists$. Кожна така властивість R$*$ продукує 4 відповідні властивості R$*_L$, R$*_R$, $\neg$R$*_L$, $\neg$R$*_R$ для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення. Наведемо для прикладу властивості, індуковані R$\exists$s та R$\exists$.

R$\exists$s$_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |\!= \Delta$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R$\exists$s$_R$) $\Gamma |\!= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

$\neg$R$\exists$s$_L$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |\!= \Delta$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

$\neg$R$\exists$s$_R$) $\Gamma |\!= \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R$\exists_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma |\!= \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi), \Gamma |\!= \Delta$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

R$\exists_R$) $\Gamma |\!= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |\!= \Delta, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

$\neg$R$\exists_{\rm L}$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

$\neg$R$\exists_{\rm R}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Наведемо властивості елімінації кванторів. Такі властивості базуються на теоремі 2.

$\exists_{\rm L}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\neg\exists_{\rm R}$) $\Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists$v$_{\rm R}$) $\Gamma, Ey \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$.

$\neg\exists$v$_{\rm L}$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$.

Для $\models_{IR}$ в силу $\neg_{\rm L}$ та $\neg_{\rm R}$ властивості вигляду $\neg *$ із запереченням виділеної формули є похідними.
Властивості E-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, Ey$.

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

6. Секвенційні числення ЧКНЛ

Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул. Як і в роботах [2, 8, 9], секвенційні числення будуємо в стилі семантичних таблиць. Ми трактуємо секвенції як множини формул, специфікованих (відмічених) символами $\vdash$ та $\dashv$. Позначаємо секвенції як $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, скорочено як Σ. Формули із Γ називаємо T-формулами, а формули із Δ – F-формулами. Це відповідає семантичному трактуванню формул із Γ як істинних, а формул із Δ – як хибних. Секвенційні числення будуємо так: секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

В цій роботі не розглядаємо секвенційні числення логік еквітонних і антитонних предикатів, такі числення описано в [2, 8]. Ми пропонуємо секвенційні числення ЧКНЛ для відношень ${}^P\!\models_{IR}$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$. Характерна їх особливість – розширені умови замкненості секвенції та оригінальні форми елімінації кванторів.

Для відношення ${}^R\!\models_C$ секвенційне числення будується опосередковано, враховуючи теорему 20. Тоді:

$\Gamma\, {}^R\!\models_C \Delta \Leftrightarrow$ секвенція $\vdash\neg\Delta, \vdash\Gamma, \dashv\Delta, \dashv\neg\Gamma$ вивідна в численні для ${}^R\!\models_{TF}$.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції.

Секвенція Σ вивідна (має виведення), якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ. Таке дерево називають виведенням секвенції Σ. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Замкнені секвенції є аксіомами секвенційного числення. Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми, вони є синтаксичними аналогами властивостей відношень логічного наслідку.

Замкненість секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає, що $\Gamma \models \Delta$. Тому умови, які гарантують наявність логічного наслідку, індукують відповідні умови замкненості секвенції. Для опису таких умов введемо наступні визначення.

Для множини специфікованих формул (секвенції) $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ задамо множини означених та неозначених предметних імен, або множини val-змінних та unv-змінних: $val(\vdash\Gamma\dashv\Delta) = \{x \in V \mid Ex \in \Gamma\}$; $unv(\vdash\Gamma\dashv\Delta) = \{x \in V \mid Ex \in \Delta\}$.

Множину нерозподілених для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ імен введемо так: $ud(\vdash\Gamma\dashv\Delta) = nm(\Gamma \cup \Delta) \setminus (val(\vdash\Gamma\dashv\Delta) \cup unv(\vdash\Gamma\dashv\Delta))$.

Формули вигляду $R_{\bar{y}}^{\bar{x}}(\Phi)$ назвемо R-формулами. Rs-формою R-формули $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$, де $\{\bar{u}\} \subseteq \nu(\Phi)$, назвемо R-формулу $R_{\bar{z}}^{\bar{v}}(\Phi)$, утворену із $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$ всеможливими спрощенням зовнішньої реномінації на основі вла стивостей R, RI, RU (застосування R дає Rs-форму Φ, яка може не бути R-формулою). Властивості R, RI, RU гарантують: якщо Ψ та ϑ мають однакові Rs-форми, то $T(\Psi_J) = T(\vartheta_J)$ та $F(\Psi_J) = F(\vartheta_J)$ для всіх інтерпретацій $\boldsymbol{J}$.

Нехай $Un \subseteq V$ – множина імен, трактованих як неозначені, а символ $\varepsilon \notin V$ позначає відсутність значення. Нехай R-формула $R_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}\Phi$ така: $\{\bar{r}, \bar{s}, \bar{y}\} \subseteq Un$, $\{\bar{x}, \bar{v}\} \cap Un = \varnothing$. Un-форма формули $R_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}\Phi$ – це вираз $R_{\bar{\varepsilon},\bar{v}}^{\bar{x},\bar{u}}\Phi$.

Для формули Ψ, яка не є R-формулою, її Un-форма збігається із Ψ.

R-формули Ψ та Ξ назвемо Rs-Un-еквівалентними, якщо Ψ та Ξ мають однакові Rs-форми або ці Rs-форми мають однакові Un-форми. Кожна R-формула Rs-Un-еквівалентна сама собій (рефлексивність).

Якщо R-формули Ψ та Ξ Rs-Un-еквівалентні, то $\neg\Psi$ та $\neg\Xi$ теж назвемо Rs-Un-еквівалентними.

Твердження 13. Якщо формули Ψ та Ξ Rs-Un-еквівалентні, то для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо:

$T(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = T(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A$ та $F(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = F(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A$.

Це означає: $\Psi_J(d)=\Xi_J(d)$ для кожних $\boldsymbol{J}$ та $d\in{}^VA$, для яких $asn(d)\cap Un=\varnothing$, тобто $Eu(d)=F$ для всіх $u\in Un$.

Тепер опишемо умови, які гарантують наявність того чи іншого логічного наслідку. Ці умови індуковані властивостями C, CL, CR, CLR, вони опираються на твердження 13. Нехай $\Gamma\subseteq Fr$, $\Delta\subseteq Fr$, $Un=\{x\,|\,Ex\in\Delta\}$.

Теорема 23. 1) Нехай формули Ψ та Ξ – Rs-Un-еквівалентні, тоді $\Psi,\Gamma\models\Xi,\Delta$; зокрема, $\Phi,\Gamma\models\Phi,\Delta$

(тут $\models$ – одне з ${}^P\!\models_{IR}$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$);

2) нехай формули Ψ та Ξ – Rs-Un-еквівалентні, тоді $\Psi,\neg\Xi,\Gamma\,{}^P\!\models_T\Delta$; зокрема, $\Phi,\neg\Phi,\Gamma\,{}^P\!\models_T\Delta$;

3) нехай формули Ψ та Ξ – Rs-Un-еквівалентні, тоді $\Gamma\,{}^P\!\models_F\Psi,\neg\Xi,\Delta$; зокрема, $\Gamma\,{}^P\!\models_F\Phi,\neg\Phi,\Delta$;

4) нехай формули φ, ξ – Rs-Un-еквівалентні та θ, ω – Rs-Un-еквівалентні, тоді $\varphi,\neg\xi,\Gamma\,{}^P\!\models_{TF}\theta,\neg\omega,\Delta$; зокрема, $\Phi,\neg\Phi,\Gamma\,{}^P\!\models_{TF}\Psi,\neg\Psi,\Delta$ для довільних формул Φ,Ψ.

Теорема 23 обґрунтовує наведені нижче умови замкненості секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ із множиною unv-змінних Un.

Базова умова замкненості індукована властивістю C:

C) існують Rs-Un-еквівалентні формули Ψ та Ξ такі: $\Psi\in\Gamma$ та $\Xi\in\Delta$; зокрема, якщо існує Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$.

Властивості CL, CR, CLR, які істотні для відношень ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, індукують додаткові умови CL, CR, CLR замкненості секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$:

CL) існують Rs-Un-еквівалентні R-формули Ψ та Ξ такі: $\Psi\in\Gamma$ та $\neg\Xi\in\Delta$;
зокрема, якщо існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\neg\Phi\in\Gamma$;

CR) існують Rs-Un-еквівалентні R-формули Ψ та Ξ такі: $\Psi\in\Delta$ та $\neg\Xi\in\Delta$;
зокрема, якщо існує формула Φ: $\Phi\in\Delta$ та $\neg\Phi\in\Delta$;

CLR) існують Rs-Un-еквівалентні R-формули φ, ξ та Rs-Un-еквівалентні R-формули θ, ω такі:
$\varphi\in\Gamma$, $\neg\xi\in\Gamma$, $\theta\in\Delta$, $\neg\omega\in\Delta$; зокрема, якщо існують формули Φ та Ψ такі: $\Phi\in\Gamma$, $\neg\Phi\in\Gamma$, $\Psi\in\Delta$, $\neg\Psi\in\Delta$.

Зрозуміло, що CLR $\Leftrightarrow$ CL та CR.

У випадку числень для відношення ${}^P\!\models_{IR}$ умови CL, CR, CLR зводяться до C.

Секвенційне числення задається базовими секвенційними формами і умовами замкненості секвенції.

Опишемо числення, які будемо називати базовими секвенційними численнями ЧКНЛ.

Числення Q_BG формалізує відношення ${}^R\!\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: C.

Числення Q_BLR формалізує відношення $\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: C$\vee$CLR.

Числення Q_BL формалізує відношення $\models_T$. Умова замкненості секвенції: C$\vee$CL.

Числення Q_BR формалізує відношення $\models_F$. Умова замкненості секвенції: C$\vee$CR.

Числення Q_BC формалізує відношення $\models_{IR}$. Умова замкненості секвенції: C.

Числення Q_BG, Q_BLR, Q_BL, Q_BR мають однакові базові секвенційні форми. Опишемо ці форми.

Форми еквівалентних перетворень ${}_{\vdash}$RR, ${}_{\dashv}$RR, ${}_{\vdash}\neg$RR, ${}_{\dashv}\neg$RR, ${}_{\vdash}$R$\neg$, ${}_{\dashv}$R$\neg$, ${}_{\vdash}\neg$R$\neg$, ${}_{\dashv}\neg$R$\neg$, ${}_{\vdash}$R$\vee$, ${}_{\dashv}$R$\vee$, ${}_{\vdash}\neg$R$\vee$, ${}_{\dashv}\neg$R$\vee$, ${}_{\vdash}$R$\exists$s, ${}_{\dashv}$R$\exists$s, ${}_{\vdash}\neg$R$\exists$s, ${}_{\dashv}\neg$R$\exists$s, ${}_{\vdash}$R$\exists$, ${}_{\dashv}$R$\exists$, ${}_{\vdash}\neg$R$\exists$, ${}_{\dashv}\neg$R$\exists$ індукуються відповідними властивостями відношення логічного наслідку $\mathrm{RR_L}$, $\mathrm{RR_R}$, $\neg\mathrm{RR_L}$, $\neg\mathrm{RR_R}$, $\mathrm{R\neg_L}$, $\mathrm{R\neg_R}$, $\neg\mathrm{R\neg_L}$, $\neg\mathrm{R\neg_R}$, $\mathrm{R\vee_L}$, $\mathrm{R\vee_R}$, $\neg\mathrm{R\vee_L}$, $\neg\mathrm{R\vee_R}$, $\mathrm{R\exists s_L}$, $\mathrm{R\exists s_R}$, $\neg\mathrm{R\exists s_L}$, $\neg\mathrm{R\exists s_R}$, $\mathrm{R\exists_L}$, $\mathrm{R\exists_R}$, $\neg\mathrm{R\exists_L}$, $\neg\mathrm{R\exists_R}$, які в свою чергу продукуються властивостями RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\exists$s, R$\exists$.

Наведемо для прикладу форми ${}_{\vdash}$RR, ${}_{\dashv}\neg$R$\vee$, ${}_{\vdash}$R$\exists$s, ${}_{\dashv}$R$\exists$:

$$ {}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\dashv}\neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma}. $$

$$ {}_{\vdash}\mathrm{R\exists s}\ \frac{{}_{\vdash}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma},\ \text{де}\ y\notin\{\bar{v},\bar{x}\};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R\exists}\ \frac{{}_{\dashv}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma},\ \text{де}\ z\in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi)); $$

Форми декомпозиції індукуються відповідними властивостями $\neg\neg_L$, $\neg\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, $\neg\vee_L$, $\neg\vee_R$:

$$ {}_{\vdash}\neg\neg\ \frac{{}_{\vdash}\Phi,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\neg\Phi,\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\neg\ \frac{{}_{\dashv}\Phi,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg\neg\Phi,\Sigma}; $$

$$ {}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\vdash}\Phi,\Sigma\qquad {}_{\vdash}\Psi,\Sigma}{{}_{\vdash}\Phi\vee\Psi,\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\dashv}\Phi,\ {}_{\dashv}\Psi,\Sigma}{{}_{\dashv}\Phi\vee\Psi,\Sigma}; $$

$_{|-}\neg\vee \dfrac{_{|-}\neg\Phi,\ _{|-}\neg\Psi, \Sigma}{_{|-}\neg(\Phi\vee\Psi), \Sigma}$; $\qquad$ $_{-|}\neg\vee \dfrac{_{-|}\neg\Phi, \Sigma \quad _{-|}\neg\Psi, \Sigma}{_{-|}\neg(\Phi\vee\Psi), \Sigma}$.

Форми елімінації кванторів та *E*-розподілу:

$_{|-}\exists \dfrac{_{|-}R_z^x(\Phi),\ _{|-}Ez, \Sigma}{_{|-}\exists x\Phi, \Sigma}$; $\qquad$ $_{-|}\neg\exists \dfrac{_{-|}\neg R_z^x(\Phi),\ _{|-}Ez, \Sigma}{_{-|}\neg\exists x\Phi, \Sigma}$;

$_{|-}\neg\exists\mathrm{v} \dfrac{_{|-}\neg\exists x\Phi,\ _{|-}Ey,\ _{|-}R_y^x(\Phi), \Sigma}{_{|-}\neg\exists x\Phi,\ _{|-}Ey, \Sigma}$; $\qquad$ $_{-|}\exists\mathrm{v} \dfrac{_{-|}\exists x\Phi,\ _{|-}Ey,\ _{-|}R_y^x(\Phi), \Sigma}{_{-|}\exists x\Phi,\ _{|-}Ey, \Sigma}$.

Для форм $_{|-}\exists$, $_{-|}\neg\exists_R$ умова: $z\in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$. Для форм $_{-|}\exists\mathrm{v}$, $_{|-}\neg\exists\mathrm{v}$ вважаємо, що *Ey* не входить до Γ, Δ.

$\mathrm{Ed} \dfrac{_{|-}Ex, \Sigma \quad _{-|}Ex, \Sigma}{\Sigma}$ за умови: *Ex* не входить до Γ, Δ.

Окрім базових форм, при побудові секвенційного дерева можна використовувати допоміжні форми спрощення. Такі форми $_{|-}$R, $_{-|}$R, $_{|-}\neg$R, $_{-|}\neg$R, $_{|-}$RI, $_{-|}$RI, $_{|-}\neg$RI, $_{-|}\neg$RI, $_{|-}$RU, $_{-|}$RU, $_{|-}\neg$RU, $_{-|}\neg$RU індукуються відповідними властивостями відношення логічного наслідку R_L, R_R, $\neg R_L$, $\neg R_R$, RI_L, RI_R, $\neg RI_L$, $\neg RI_R$, RU_L, RU_R, $\neg RU_L$, $\neg RU_R$, які в свою чергу продукуються властивостями RI, RU, R. Перетворення на основі форм спрощення фактично закладені в умови замкненості секвенції: для встановлення *Rs*-*Un*-еквівалентності формул необхідна побудова *Rs*-форм для цих формул, що робиться на основі RI, RU, R. Наведемо тут для прикладу форми $_{|-}$RI та $_{-|}\neg$RU:

$_{|-}\mathrm{RI} \dfrac{_{|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{_{|-}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}$; $\qquad$ $_{-|}\neg\mathrm{RU} \dfrac{_{-|}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{_{-|}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}$, де $y\in\nu(\Phi)$;

Базовими формами числення Q_BC є $_{|-}$RR, $_{-|}$RR, $_{|-}$R$\neg$, $_{-|}$R$\neg$, $_{|-}$R$\vee$, $_{-|}$R$\vee$, $_{|-}$R$\exists$s, $_{-|}$R$\exists$s, $_{|-}$R$\exists$, $_{-|}$R$\exists$, $_{|-}\vee$, $_{-|}\vee$, $_{|-}\exists$, $_{-|}\exists$v, Ed, до яких додаємо $_{|-}\neg$ та $_{-|}\neg$. Допоміжні форми спрощення: $_{|-}$R, $_{-|}$R, $_{|-}$RI, $_{-|}$RI, $_{|-}$RU, $_{-|}$RU. Форми $_{|-}\neg$ та $_{-|}\neg$ такі:

$_{|-}\neg \dfrac{_{-|}\Phi, \Sigma}{_{|-}\neg\Phi, \Sigma}$; $\qquad$ $_{-|}\neg \dfrac{_{|-}\Phi, \Sigma}{_{-|}\neg\Phi, \Sigma}$.

Властивості відношень логічного наслідку індукують основну властивість базових секвенційних форм:

Теорема 24. 1. Нехай $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta}$ – базова форма; тоді: a) $\Lambda \models \mathrm{K} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$; b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$.

2. Нехай $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K} \quad _{|-}\mathrm{X}_{-|}\mathrm{Z}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta}$ – базова форма; тоді: a) $\Lambda \models_* \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models_* \mathrm{Z} \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta$; b) $\Gamma \not\models_* \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models_* \mathrm{K}$ або $\mathrm{X} \not\models_* \mathrm{Z}$.

Для кожного з пропонованих числень, що формалізує відповідне відношення логічного наслідку, вірні теореми коректності та повноти. Для доведення повноти пропонованих секвенційних числень використовуємо метод модельних множин (подібні доведення див., напр., [8]).

Теорема 25 (коректності та повноти). $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$ секвенція $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна.

Висновки

Досліджено семантичні та синтаксисні аспекти композиційно-номінативних логік. Розглянуто класи чистих першопорядкових логік часткових і тотальних, однозначних і неоднозначних квазіарних предикатів. Описа но семантичні моделі та мови таких логік, особливу увагу приділено вивченню композиційних предикатних алгебр та класів інтерпретацій (семантик). Виділено низку підалгебр першопорядкової алгебри квазіарних предикатів, описано відповідні семантики. Розглянуто відношення логічного наслідку для множин формул, досліджено їх властивості. Для таких відношень запропоновано низку числень секвенційного типу. Характерна осо бливість цих числень – розширені умови замкненості секвенції та оригінальні форми елімінації кванторів. По дібні дослідження планується продовжити для першопорядкових композиційно-номінативних логік з рівністю.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Нікітченко М.С. , Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. *Нікітченко М.С. , Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.

4. *Нікітченко М.С. , Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів: семантичні аспекти // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 165–172.
5. *Нікітченко М.С. , Шкільняк О.С. , Шкільняк С.С.* Першопорядкові композиційно-номінативні логіки із узагальненими реномінаціями // Проблеми програмування. – 2014. – № 2–3. – С. 17–28.
6. *Nikitchenko M., Shkilniak S.* Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates // Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. – Chisinau, Moldova. – P. 180–197.
7. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Алгебри квазіарних та бі-квазіарних реляцій // Проблеми програмування. – 2016. – № 1. – С. 17–28.
8. *Шкільняк С.С.* Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік // Проблеми програмування. – 2013, № 3. – С. 22–37.
9. *Шкільняк С.С.* Секвенційні системи логічного виведення першопорядкових логік часткових предикатів // Компьютерная математика. – 2013, Вып. 2. – С. 88–96.
10. *Нікітченко М.С. , Шкільняк О.С. , Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Проблеми програмування. – 2016. – № 1. – С. 13–25.
11. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.

References

1. ABRAMSKY, S., GABBAY, D. and MAIBAUM, T. (editors). (1993–2000). Handbook of Logic in Computer Science Modal logic. Oxford University Press.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). Mathematical logic and theory of algorithms. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
3. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
4. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2012). Composition-nominative logics of quasiary predicates: semantic aspects. In Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. No 4. P. 165–172 (in ukr).
5. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2014). First-order composi tion-nominative logics with generalized renominations. In Problems in Progamming. № 2–3, p. 17–28 (in ukr).
6. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. In Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
7. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2016). Algebras of quasiary and of bi-quasiary relations. In Problems in Progamming. № 1, p. 3–12 (in ukr).
8. SHKILNIAK, S. (2013). Spectrum of sequent calculi of first-order composition-nominative logics. In Problems in Progamming. № 3, p. 22–37 (in ukr).
9. SHKILNIAK, S. (2013). Sequent systems of logical deduction for pure first-order logics of partial predicates. In Computer mathematics. **2**, p. 88–96 (in ukr).
10. SHKILNIAK, O. (2016). Logical consequence relations in logics of quasiary predicates. In Problems in Progamming. № 1, p. 13–25 (in ukr).
11. SMIRNOVA, E. (1996). Logic and Philosophie. Moskow: ROSSPEN (in rus).

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри Теорії та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 200, у тому числі у фахових виданнях – 100.
Кількість наукових публікацій в іноземних виданнях – 30.
Індекс Гірша – 8 (6 з 2010).
http://orcid.org/0000-0002-4078-1062.

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри Інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – 78, у тому числі у фахових виданнях – 30.
Кількість наукових публікацій в іноземних виданнях – 8.
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри Теорії та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 200, у тому числі у фахових виданнях – 92.
Кількість наукових публікацій в іноземних виданнях – 14.
Індекс Гірша – 4 (3 з 2010).
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

Місце роботи авторів:

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 2590519.
E-mail: me.oksana@gmail.com, nikitchenko@unicyb.kiev.ua, sssh@unicyb.kiev.ua.